منطق باور شرطی و یادگیری

علی فرجامی

تشکر

منّت خدای را عزّوجّل که طاعتش موجب قربتست و بشکر اندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو میرود ممّد حیاتست و چون برمیآید مفرّح ذات. پس درهر نفسی دو نعمت موجودست و بر هر نعمتی شکری واجب.

پس از شکر خدا در اینجا واجب میبینم از کسانی که این پایان‌نامه با حمایت‌های ایشان نوشته شده است یاد و تشکر کنم.

• از دکتر مجید علی‌زاده که تقریباً هر آنچه که از منطق می‌دانم از کلاس‌های شیرین ایشان است سپاس‌گزارم. بخش اعظم آنچه که در این پایان‌نامه است حاصل شاگردی ایشان است.

• از دکتر شفیعی و دکتر اردشیر به خاطر داوری، دقت نظر و ارزیابی‌شان سپاس‌گزارم. بخشی از آنچه که در این پایان‌نامه است حاصل نکته‌بینی آنهاست.

• از مسعود معمارزاده به خاطر ویرایش فنی و ادبی فصل چهارم، سجاد ابولفتحی به خاطر ویرایش ادبی فصل اول، دوم و سوم سپاس‌گزارم. بخشی از آنچه که در این پایان‌نامه است حاصل دقت آنهاست.

• از لاور موس و شاگردش دکتر صالح علی‌یاری به‌خاطر مطالعه‌ی فنی بخش چهارم و بررسی آن سپاس‌گزارم. بخشی ازآنچه که در این پایان‌نامه است حاصل اهمیت دادن موضوع توسط این دو تن است.

• از سانیا اسمت و بالتاگ به خاطر نقدشان به بخشی از فصل چهارم سپاس‌گزارم. بخشی از نتایج فصل چهارم حاصل نقد آنهاست.

• از موسسه‌ی IHPST و دانشگاه پاریس ۱ به خاطر حمایت مالی جهت رفت و آمد و اقامت در پاریس جهت سمینار " منطق،پرسش‌ها، پرسش‌گری[۱] " که امکان گفت و گو با متخصصان معرفت‌شناسی صوری را برای من فراهم کرد، سپاس‌گزارم. بخشی از آنچه که در این پایان‌نامه است حاصل امید و انگیزش بخشی آنهاست.

• از پدر و مادر عزیزم مجتبی فرجامی و مریم نرگسی که آرامش زندگی‌ام حاصل بی‌خوابی آنهاست سپاس‌گزارم. بخشی از آنچه که در این پایان‌نامه است آرامش آنهاست.

• از همسر مهربانم که برای انجام این پایان‌نامه در بخشی از وظایفم نسبت به او کوتاهی کردم عذرخواهی می‌کنم و به خاطر صبرش سپاس‌گزارم. بخشی از آنچه که در این پایان‌نامه است مهربانی اوست.

• از برادرانم حسین فرجامی و حمید فرجامی بابت در اختیار گذاشتن اتاق مشترکمان به من برای انجام پایان‌نامه سپاس‌گزارم. بخشی از آنچه که در این پایان‌نامه است حاصل عدم شیطنت آنهاست.

[۱] Logic, Questions and Inquiry: A conference on Hintikka's Interrogative Model of Inquiry

•از تمامی معلمان، دبیران، (خانم دریابان، عماد ؛ آقای حمادی‌پور، ولایی و...) اساتید و تمام کسانی که چیزی از آنها یاد گرفته‌ام سپاس‌گزارم. بخشی از این پایان‌نامه وجود آنهاست.

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه نظریه‌ی تغییر باور را در دو حالت ایستا و پویا بررسی می‌کنیم. با توجه به رابطه‌ی بین منطق شناختی (پویا) و نظریه‌ی تغییر باور مدلی برای نظریه‌ی تغییر باور ایستا (پویا) ارائه می‌دهیم.

نظریه‌ی تغییر باور: نظریه‌ی تغییر باور یکی از حوزه‌های معرفت‌شناسی است. نظریه‌ی تغییر باور فرآیند تغییر باورهای یک فرد یا یک کنشگر هنگام کسب اطلاعات جدید است. یکی از دغدغه‌های حوزه‌ی معرفت‌شناسی این است که بتواند یک شرح کافی از فرآیند تغییر باور عقلانی ارائه دهد.

منطق شناختی و منطق شناختی پویا: منطق شناختی یک منطق وجهی با عملگرهایی برای دانش و باور است. منطق شناختی به استدلالهای درباره‌ی دانش توجه می‌کند. منطق شناختی پویا گسترشی از منطق شناختی با عملگرهای کنشی است که تغییر اطلاعات را صورت‌بندی می‌کند.

در این پایان‌نامه با ابزار منطق شناختی و منطق شناختی پویا و استفاده از باورهای شرطی نظریه‌ی تغییر باور را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. باورهای شرطی و فرآیند پرسش و پاسخ که در قالب منطق شناختی پویا قابل بیان است، گام‌هایی برای صوری‌سازی مفهوم یادگیری هستند که به آن نیز خواهیم پرداخت. همچنین سعی می‌کنیم این مطالعات را با استفاده از نظریه‌ی رسته‌ها و هم‌جبرها گسترش دهیم.

فصل اول: مقدمه. در این فصل ابتدا اصطلاحات مربوط به معرفت‌شناسی صوری را معرفی می‌کنیم. سپس نحو و معناشناسی منطق شناختی پایه را برای دانش و باور بیان می‌کنیم. همچنین ابزار منطق شناختی پایه را معرفی‌خواهیم کرد و مفاهیم نظریه‌ی رسته‌ها که در فصل چهارم مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان خواهیم کرد.

فصل دوم: نظریه‌ی تغییر باور ایستا. در این فصل اصول نظریه‌ی تغییر باور را معرفی خواهیم کرد و دو مدل شناختی ـ مدل‌های توجیه‌پذیر و مدل‌های باور شرطی ـ را به‌عنوان بدیل‌های شناختی آن معرفی می‌کنیم. نحو و

معناشناسی مدل توجیه‌پذیر و مدل باور شرطی را بیان خواهیم کرد و نشان خواهیم داد که این دو مدل به چه نحو تغییر باور ایستا را صوری خواهند کرد.

فصل سوم: نظریه‌ی تغییر باور پویا. این فصل به صوری‌سازی عملگرهای کنشی مربوط می‌شود. مدل‌های توجیه‌پذیر کنشی و باور شرطی کنشی می‌توانند این کنش‌ها را صوری کنند. در این فصل بیان خواهیم کرد که مدل‌های کنشی به چه نحو به روی مدل‌های ایستا عمل‌خواهند کرد و مدل‌های بهنگام‌شده به چه نحو بدست خواهند آمد. قاعده‌ی بهنگام‌شدن کنشی‌مقدم را به عنوان قاعده‌ی بهنگام‌شدن بیان خواهیم کرد. نقش عمل بهنگام‌شدن کنشی‌مقدم در این پایان‌نامه بسیار اساسی است، چرا که قاعده‌ای است که کنش‌های مختلف را یکتا می‌کند.

فصل چهارم: نگاه رسته‌ای به منطق شناختی. در این فصل با استفاده از مدل‌های شناختی و مدل‌های شناختی پویا یک رسته[2] خواهیم ساخت. ویژگی‌های این رسته را در قالب نظریه‌ی رسته‌ها مطالعه خواهیم کرد. این رسته بستری را برای مطالعات شناختی فراهم می‌کند. برای این منظور نشان می‌دهیم چگونه می‌توان مفهوم زمان را در قالب یک تابعگون برای این رسته بیان کرد. با استفاده از این رسته یک زیررسته در فضاهای اندازه‌پذیر تعریف‌خواهیم کرد و از سیستم‌های نحوی و معنایی که برای هم‌جبرهای رسته‌ی فضاهای اندازه‌پذیر موجود است برای مطالعات‌مان بهره خواهیم برد.

[2] معرفی و بررسی خواص این رسته توسط نگارنده صورت گرفته است.

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ معرفت‌شناسی

می توان گفت اولین و قدیمی‌ترین سوالات بشر مربوط به حوزه‌ی معرفت‌شناسی[۱] است. معرفت‌شناسی علمی است که درباره‌ی دانش و باورهای فرد درباره‌ی جهان واقعی و دیگر چیزها صحبت می‌کند. افلاطون اولین کسی است که تعریفی از معرفت بیان کرد. او معرفت را باور صادق موجه می‌دانست. در این تعریف سه مفهوم باور، صدق یا درستی و توجیه‌پذیری مورد توجه قرار گرفته است.

باور[۲]. باورداشتن در کلی‌ترین تعبیر، بگونه‌ای از ارتباط بین شخص و گزاره‌ای مانند p اطلاق می‌شود [۲].

صدق[۳]. واژه‌های صدق، راستی و حقیقت تقریباً معادل یکدیگر به‌کار می‌روند. تعریف دقیقی از صدق یک گزاره به نظریه‌های موجود درباره‌ی صدق برمی‌گردد. دو نظریه‌ی اصلی درباره‌ی صدق نظریه‌ی انسجام[۴] و نظریه‌ی مطابقت[۵] هستند [۲].

توجیه[۶]. توجیه در کلی‌ترین بیان بکارگیری دلیل‌ها و شواهدی است که برای اثبات صادق‌بودن گزاره‌ای مانند p صورت می‌گیرد[۲]. تعریف معرفت به عنوان باور صادق توجیه‌پذیر تا سال‌ها مورد قبول بود تا با انتقادهای گتیه ([۲۳]) زیر سؤال رفت. در واقع در این تعریف از معرفت دلایلی که ممکن است نظر کنشگر را تغییر دهد،

[۱] Epistemology
[۲] Belief
[۳] Truth
[۴] Coherence theory of truth
[۵] Correspondence theory of truth
[۶] justification

چشم‌پوشی شده است. همچنین در مورد تغییراتی که برخلاف شهود ما هستند، صحبت نمی‌کند. بعد از انتقاد گتیه افراد زیادی تلاش کردند تا با قوی‌کردن شروط باور و یا اضافه کردن مؤلفه‌هایی به تعریف افلاطون تعریف بهتری از معرفت ارائه کنند. با این حال در این پایان‌نامه تعریف ما از معرفت همان باور صادق موجه است. حال سؤالی که پیش می‌آید این است که باتوجه به اشکلات گتیه در مورد رابطه‌ی معرفت و باور، پس چرا مطالعات گسترده‌ای بر اساس این تعریف معرفت، انجام می‌گیرد و این پایان‌نامه بر اساس این تعریف حرکت می‌کند. باید توجه داشت که مطالعه‌ی باورهای توجیه‌پذیر به اندازه‌ی کافی قابل ارزش و احترام است هر چند که نتوان تعریف جامعی از معرفت بر این اساس ارائه کرد. فیلسوفان و ریاضی‌دانان مشتاق مطالعه‌ی باور و باورهای توجیه‌پذیر هستند. در ضمن در مورد مؤلفه‌ی باور اختلاف کمتری در بین فیلسوفان وجود دارد. تمامی جنبه‌های رفتار آدمی وابسته به باورهای او است. بنابراین در مطالعه‌ی حرکت‌های اجتماعی، علمی و... باورهای افراد مورد توجه قرار می‌گیرند. در این پایان‌نامه نیز ما می‌خواهیم تغییر باور را مورد مطالعه قرار دهیم. در ضمن با توجه به تعاریف مختلفی که از معرفت بیان می‌کنیم رفتار متقابل باور و معرفت را بررسی خواهیم کرد.

۱.۱.۱ معرفت‌شناسی صوری

معرفت‌شناسی صوری شاخه‌ای از معرفت‌شناسی است که سعی دارد با استفاده از روش‌های صوری معرفت و باور را مورد مطالعه قراردهد. یکی از این روش‌های صوری منطق ریاضی است که در ادامه دو رده از این منطق‌ها که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند را معرفی خواهیم کرد.

۲.۱.۱ منطق شناختی

سرآغاز منطق شناختی[۷] برمی‌گردد به کتاب "معرفت و باور: مقدمه‌ای بر منطق این دو مفهوم" که توسط هینتیکا[۸] در سال ۱۹۶۲ [۳۲] نوشته شد. هینتیکا باتوجه به مهارت‌های ریاضی خود بر اساس ایده‌ای از ون‌رایت[۹] [۶۲] توانست مفهوم معرفت و باور را صوری کند. در واقع نخستین بار مفهوم جهان‌های ممکن در کار کارنپ[۱۰] [۱۸] دیده می‌شود. هینتیکا از این ایده استفاده کرد و با اضافه‌کردن مفهوم دسترس‌پذیری توانست صوری‌سازی‌اش

[۷] Epistemic logic
[۸] Hintikka
[۹] Von Wright
[۱۰] Carnap

را انجام دهد. شکل کامل این صوری‌سازی توسط کریپکی در [۳۹] بیان شده است. معناشناسی‌ای که هینتیکا استفاده کرد به این قرار است که کنشگر باور یا معرفت دارد که چیزی برقرار است اگر و تنها اگر آن چیز در تمام جهان‌هایی که به آن دسترسی دارد برقرار باشد. این معناشناسی کار هینتیکا را برای صوری‌سازی معرفت و باور هموار کرد. در ادامه منطق شناختی و توسعه‌ی آن منطق شناختی پویا را که بر اساس این معناشناسی هستند را معرفی می‌کنیم.

زبان منطق شناختی

زبان منطق شناختی شامل مجموعه‌ی P از گزاره‌های اتمی (شمارا) و مجموعه‌ی A از اندیس کنشگرها است. زبان منطق شناختی $\mathcal{L}_K$ برای حالت چند کنشگره به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\varphi \ ::= \ p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_a\varphi.$$

در این زبان فرمول‌ها توسط عملگرهای $\wedge$ و $\neg$ از گزاره‌های اتمی ساخته می شوند. همچنین خلاصه نویسی‌های زیر را نیز در نظر می گیریم.

- $(\varphi \vee \psi) = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$؛
- $\top = p \vee \neg p$؛
- $\bot = \neg\top$؛
- $(\varphi \longrightarrow \psi) = (\neg\varphi \vee \psi)$؛
- $(\varphi \longleftrightarrow \psi) = (\varphi \longrightarrow \psi) \vee (\psi \longrightarrow \varphi)$.

نماد $K_a\varphi$ به این معنا است که کنشگر $a \in A$، φ را می‌داند. حال برای اینکه نشان دهیم گروه $B \subseteq A$، به φ معرفت دارند از نماد زیر استفاده می‌کنیم.

$$E_B\varphi = \bigwedge_{b\in B} K_b\varphi.$$

معناشناسی منطق شناختی

معناشناسی که ما اینجا برای منطق شناختی در نظر می‌گیریم با استفاده از مدل‌های کریپکی است.

تعریف ۱.۱ (مدل کریپکی). برای مجموعه‌ی P از گزاره‌های اتمی و مجموعه‌ی متناهی A از کنشگرها، یک مدل کریپکی یک ساختار $M = \langle S, R^A, V^P \rangle$ است که در آن:

- S یک مجموعه از حالت‌ها است. مجموعه‌ی S را گاهی با نماد $\mathcal{D}(M)$ به عنوان دامنه‌ی M نشان می‌دهیم.
- R^A یک تابع می‌باشد بگونه‌ای که برای هر $a \in A$، $R^A(a) \subseteq S \times S$ یک رابطه‌ی دسترس‌پذیری است. همچنین ما بیشتر از R_a به جای $R^A(a)$ و از $R_a st$ به جای (sR_at) استفاده می‌کنیم.
- $V^P : P \longrightarrow 2^S$ یک تابع ارزیاب است بطوریکه برای هر $p \in P$، $V^P(p) \subseteq S$ مجموعه‌ی نقاطی است که p در آنها درست است.

گاهی ما به طور خلاصه برای مجموعه‌های P و A، مدل کریپکی‌مان را به صورت $M = \langle S, R, V \rangle$ نشان می‌دهیم. همچنین از نماد V_p به جای نماد $V(p)$ برای اتم p و تابع ارزیاب V استفاده می‌کنیم.
اگر تمام روابط R_a در M رابطه‌ی هم‌ارزی (تعریف ۲.۱.) باشند ما مدل M را یک **مدل شناختی** می‌گوییم. در مدل‌های شناختی ما از نماد $\sim_a$ به جای R_a استفاده می‌کنیم و مدل‌مان را به صورت $M = \langle S, \sim, V \rangle$ نشان می‌دهیم.

تعابیر فرمول‌های شناختی فرمول‌های شناختی را برای جفت‌های (M, s) از مدل کریپکی $M = \langle S, R, V \rangle$ و حالت $s \in S$ تعبیر می‌کنیم. زمانی که می‌نویسم (M, s) منظورمان این است که $s \in \mathcal{D}(M)$ است. با کمی اغماض در مشکل‌نویسی منظورمان از (M, s) همان حالت s است. اگر M یک مدل شناختی باشد جفت (M, s) را یک حالت شناختی می‌نامیم.

درستی فرمول φ در (M,s) که با نماد $M,s\vDash\varphi$ داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$M,s\vDash p \quad\Leftrightarrow\quad s\in V(p);$$

$$M,s\vDash(\varphi\wedge\psi) \quad\Leftrightarrow\quad M,s\vDash\varphi; M,s\vDash\psi;$$

$$M,s\vDash K_a\varphi \quad\Leftrightarrow\quad (\forall t R_a st \quad M,t\vDash\varphi).$$

در نمادگذاری به جای اینکه بگوییم $M,s\vDash\varphi$ برقرار نیست می‌توانیم بنویسیم $M,s\nvDash\varphi$. همچنین برای دوگان K_a (به عنوان عملگر امکان شناختی) داریم :

$$M,s\vDash\hat{K}_a\varphi \quad\Leftrightarrow\quad \exists t R_a st \quad M,t\vDash\varphi.$$

تعریف ۲.۱. R را به عنوان یک خانواده از رابطه‌های دسترس‌پذیری R_a برای $a\in A$ در نظر بگیرید.

۱. کلاس تمام مدل‌های کریپکی را با $\mathcal{K}$ نشان می‌دهیم و $\mathcal{K}\vDash\varphi$ متناظر است با $\vDash\varphi$.

۲. رابطه‌ی R_a را بازتابی می‌گوییم هرگاه برای هر نقطه‌ی s داشته باشیم $R_a ss$. همچنین کلاس تمام کریپکی مدل‌های $M=\langle S,R,V\rangle$ که در آن تمام R_a ها بازتابی هستند را با $\mathcal{T}$ نشان می‌دهیم.

۳. رابطه‌ی R_a را سریال می گوییم هرگاه برای هر s یک t چنان وجود داشته باشد که $R_a st$. کلاس تمام کریپکی مدل‌های سریال را با $\mathcal{KD}$ نشان می‌دهیم.

۴. رابطه‌ی R_a را متعدی می‌گوییم هرگاه برای هر s، t و u اگر $R_a st$ و $R_a tu$ آنگاه داشته باشیم $R_a su$. کلاس تمام کریپکی مدل‌های متعدی را با $\mathcal{K}4$ و کلاس تمام کریپکی مدل‌های بازتابی و متعدی را با $\mathcal{S}4$ نشان می‌دهیم.

۵. رابطه‌ی R_a را اقلیدسی می‌گوییم هرگاه برای هر s، t و u اگر $R_a st$ و $R_a su$ داشته باشیم $R_a tu$. کلاس تمام کریپکی مدل‌های متعدی و اقلیدسی را با $\mathcal{K}45$ و کلاس تمام کریپکی مدل‌های سریال متعدی و اقلیدسی را با $\mathcal{KD}45$ را نشان می‌دهیم.

۶. رابطه‌ی R_a را یک رابطه‌ی هم ارزی می‌گوییم هرگاه این رابطه بازتابی، متعدی و متقارن (برای هر s، t اگر $R_a st$ آنگاه $R_a ts$) باشد. کلاس تمام کریپکی مدل‌ها با رابطه‌ی هم‌ارزی را با $\mathcal{S}5$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۱. *فرض کنید φ و ψ فرمول‌هایی در زبان $\mathcal{L}_k$ و K_a عملگر شناختی برای $a \in A$ است. $\mathcal{K}$ را به عنوان مجموعه‌ی تمام مدل‌های کریپکی و $\mathcal{S}5$ را به عنوان مجموعه‌ی تمام مدل‌های کریپکی که رابطه‌ی دسترس‌پذیری آنها، رابطه‌ی هم‌ارزی است در نظر بگیرید. روابط زیر برقراررند.*

$\mathcal{K} \vDash K_a\varphi \wedge K_a(\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow K_a\psi;$ **LO۱**

$\mathcal{K} \vDash \varphi \Longrightarrow \vDash K_a\varphi;$ **LO۲**

$\mathcal{K} \vDash \varphi \longrightarrow \psi \Longrightarrow \vDash K_a\varphi \longrightarrow K_a\psi;$ **LO۳**

$\mathcal{K} \vDash \varphi \longleftrightarrow \psi \Longrightarrow \vDash K_a\varphi \longleftrightarrow K_a\psi;$ **LO۴**

$\mathcal{K} \vDash (K_a\varphi \wedge K_a\psi) \longrightarrow K_a(\varphi \wedge \psi);$ **LO۵**

$\mathcal{K} \vDash K_a\varphi \longrightarrow K_a(\varphi \vee \psi);$ **LO۶**

$\mathcal{S}5 \vDash \neg(K_a\varphi \wedge K_a\neg\varphi).$ **LO۷**

اثبات. ر.ک.[۲۱]. ■

نکته. این قضیه نشان می‌دهد که مدل‌های کریپکی چرا مدل‌های خوبی برای معرفت هستند. در واقع قواعد بالا در تمامی مدل‌های کریپکی صدق می‌کنند و می‌توانند تحلیل خوبی از دانش در وضعیت علم نامتناهی ــوضعیتی که کنشگر نسبت به تمام استنتاج‌هایی که از دانشش آگاه استــ ارائه کند. قانون LO۱ بیان می کند که دانش تحت استنتاج بسته است. قانون LO۲ بیان می‌کند که فرد تمام حقایق $\mathcal{S}5$ را می‌داند. قوانین LO۳ تا LO۵ بیان می‌کنند که فرد قادر به استنتاج منطقی باتوجه به دانشش است. قانون LO۷ بیان می‌کند که دانشش دارای سازگاری درونی است.

منطق شناختی پایه

منطق شناختی پایه **K**، با K_a به عنوان عملگر وجهی برای هر $a \in A$ شامل تمام جانشینی‌های قضیه‌های منطق گزاره‌ای کلاسیک، اصل K، قاعده‌ی حذف تالی MP و قاعده‌ی ضرورت Nec است.

- اصل پخش‌پذیری K_a روی $\longrightarrow$.

$$K_a(\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow (K_a\varphi \longrightarrow K_a\psi).$$

- قاعده‌ی حذف تالی بدین معنا که از φ و $\psi \longrightarrow \varphi$ بدست بیاید ψ.
- قاعده‌ی ضرورت K_a بیان می‌کند از φ بدست بیاید $K_a\varphi$.

برخی نتایج دستگاه **K** (از نماد $\vdash \varphi$ به جای $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ استفاده می‌کنیم.) را در ادامه بیان خواهیم کرد.

۱. قاعده‌ی قیاس فرضی از اصول **K** بدست می‌آید.

$$\vdash \varphi \longrightarrow \chi, \vdash \chi \longrightarrow \psi \Longrightarrow \vdash \varphi \longrightarrow \psi.$$

۲. عبارات زیر نیز از اصول **K** بدست می‌آیند.

$$\vdash \varphi \longrightarrow \psi \Longrightarrow \vDash K_a\varphi \longrightarrow K_a\psi.$$

$$\vdash (K_a\varphi \wedge K_a\psi) \longrightarrow K_a(\varphi \wedge \psi).$$

۳. اصل پخش‌پذیری با عبارات زیر معادل است.

$$\vdash (K_a\varphi \wedge K_a(\varphi \longrightarrow \psi)) \longrightarrow K_a\psi.$$

$$\vdash K_a(\varphi \wedge \psi) \longrightarrow (K_a\varphi \wedge K_a\psi).$$

همچنین اصول LO۱ تا LO۶ از دستگاه **K** بدست می‌آیند. اصل دیگری که در مطالعه‌ی دانش نقش مهمی ایفا می‌کند، **اصل درستی دانش** است. به این معنا که اگر چیزی دانسته شد آنوقت آن چیز درست است. در واقع این اصل نشان می‌دهد که دانش راستگو است. این اصل را با T نشان می‌دهیم.

$$K_a\varphi \longrightarrow \varphi. \quad T$$

دو اصل نیز که به اصل **کنشگر درون‌نگر** معروف هستند نشان می‌دهند شخص به آنچه می‌داند یا نمی‌داند آگاهی دارد، که به ترتیب **درونگرایی مثبت و درونگرایی منفی** نامیده می‌شوند و به عنوان اصل 4 و اصل 5 نشانشان می‌دهیم.

$$K_a\varphi \longrightarrow K_aK_a\varphi. \quad 4$$

$${}_a\varphi \longrightarrow K_{aa}\varphi. \quad 5$$

در ادامه نمادگزاری زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\mathbf{T} = \mathbf{K} + 5؛$$

$$\mathbf{S}4 = \mathbf{T} + 4.$$

قضیه ۲.۱.۱ (تمامیت و درستی). *دستگاه منطقی $\boldsymbol{K}$ نسبت به کلاس مدل‌های $\mathcal{K}$ کامل و تمام است. به این معنا که $\vdash_{\boldsymbol{K}} \varphi$ اگر و تنها اگر $\mathcal{K} \models \varphi$. (این قضیه در مورد $\boldsymbol{T}$، $\mathcal{T}$؛ $\boldsymbol{S}4$، $S4$ و $\boldsymbol{S}5$، $S5$ نیز برقرار است.)*

اثبات. ر.ک.[۲۱]. ■

قضیه ۳.۱.۱ (مدل متناهی و تصمیم‌پذیری). *هر کدام از سیستم‌های بالا دارای خاصیت مدل متناهی هستند. به این معنا که هر φ در یک کلاس χ ارضاء شدنی است اگر و تنها اگر در یک مدل متناهی در این کلاس ارضاء شدنی باشد. همچنین هر یک از مدل‌های بالا تصمیم‌پذیر هستند. به این معنا که برای هر کلاس χ یک روند تصمیم‌پذیر وجود دارد که در یک زمان محدود و مشخصی بیان می‌کند هر φ در این کلاس ارضاء شدنی است یا نه.*

اثبات. ر.ک.[۲۱]. ■

معرفت همگانی

در اینجا مفهوم دیگری برای دانش گروهی در سیستم‌های با چند کنشگر معرفی می‌کنیم. این مفهوم، مفهوم **معرفت همگانی**[۱۱] است.

---

[۱۱] Common knowledge

$$C_B\varphi = \bigwedge_{n=0}^{\infty} E_B^n\varphi.$$

که در آن $E_B^0\varphi := \varphi$ است. منطق به همراه معرفت همگانی را با $\boldsymbol{S5C}$ نمایش می‌دهیم. (در واقع این مفهوم به دنبال بیان کردن درون‌نگری مثبت و منفی برای معرفت گروهی است.)

تعریف ۳.۱ ($\boldsymbol{S5C}$). فرض کنید که A یک مجموعه از کنشگرها و B زیر مجموعه‌ی دلخواهی از آن است، آنگاه دستگاه اصل موضوعی $\boldsymbol{S5C}$ شامل تمام اصول و قواعد $\mathbf{S}5$ به همراه قواعد و اصول زیر است.

(قانون پخش‌پذیری C_B روی $\longrightarrow$) $\quad C_B(\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow (C_B\varphi \longrightarrow C_B\psi);$

(ترکیب) $\quad C_B\varphi \longrightarrow (\varphi \wedge E_B C_B\varphi);$

(استقراء برای دانش مشترک) $\quad C_B(\varphi \longrightarrow E_B\varphi) \longrightarrow (\varphi \longrightarrow C_B\varphi);$

(قاعده‌ی ضرورت برای C_B) $\quad \varphi \Longrightarrow C_B\varphi.$

نکته. اصل ترکیب، راستگویی دانش همگانی را نشان می‌دهد. همچنین با اصل ترکیب و تعریف E_B می‌توان برای $k \in \mathbb{N}$ نشان داد که $\vdash C_B\varphi \longrightarrow E_B^k\varphi$. اصل استقرا نشان می‌دهد که چگونه می‌توانیم استنتاج کنیم که φ دانش همگانی است. با استنتاج φ و دانش مشترک در مورد $\varphi \longrightarrow E_B\varphi$ می‌توان استنتاج کرد که φ دانش همگانی است.

منطق معرفت و باور

دستگاه موضوعی $\mathbf{KD}45$ که شامل تمام جانشینی‌های گزاره‌های راستگوی منطق گزاره‌ای به همراه اصول زیر است مفهوم دانش و باور را صورت‌بندی می‌کند. این دستگاه موضوعی نسبت به کلاس مدل‌های $\mathcal{KD}45$ درست و تمام است.

$K_a(\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow (K_a\varphi \longrightarrow K_a\psi);$ (قانون پخش‌پذیری K_a روی $\longrightarrow$)

$\neg B_a\bot;$ (سازگاری باورها)

$B_a\varphi \longrightarrow B_aB_a\varphi;$ (درون‌نگری مثبت)

$\neg B_a\varphi \longrightarrow B_a\neg B_a\varphi;$ (درون‌نگری منفی)

$\varphi, \varphi \longrightarrow \psi \Longrightarrow \psi;$ (قاعده‌ی حذف تالی)

$\varphi \Longrightarrow B_a\varphi.$ (قاعده‌ی ضرورت باور)

نکته. از آنجا که باور به یک گزاره به معنای درستی آن گزاره نیست پس نمی‌توانیم اصل درستی را برای باورها به کار ببریم. اما باورها بایستی حداقل به لحاظ درونی سازگار باشند به همین خاطر از اصل سازگاری باورها که از اصل درستی ضعیف‌تر است استفاده می‌کنیم. سیستمی که در اینجا به خوبی بیانگر ارتباط باور و معرفت نیست. در واقع این سیستم یک سیستم ابتدایی برای صورت‌بندی مفهوم دانش و باور است.

۳.۱.۱ منطق شناختی پویا

منطق شناختی پویا[۱۲] گسترشی از منطق شناختی با یک عملگر وجهی برای نشان دادن تغییر باور است. سه جریان در شکل‌گیری منطق شناختی پویا مؤثر بوده‌اند.

۱.زبان‌شناسی و فلسفه‌ی زبان. گروننداینک و اشتوکف[۱۳] برای پیداکردن معناشناسی مناسب برای تغییر اطلاعات در زبان‌شناسی و فلسفه‌ی زبان از یک معناشناسی پویا استفاده کردند. آنها معنا[۱۴] را نه به صورت مشروط به

[۱۲] Dynamic epistemic logic
[۱۳] Groenendijk, Stokhof
[۱۴] Meaning

درستی[۱۵] بلکه به صورت مشروط به بهنگام‌شدن در نظر گرفتند[۴۴]. همچنین ولتمان[۱۶] از مفهوم بهنگام‌کردن[۱۷] در تحلیل استدلال‌های پایه [۵۹] استفاده کرد.

۲.علوم کامپیوتر. دومین توسعه‌ی منطق شناختی پویا مربوط می‌شود به توسعه‌ی منطق وجهی که ابتدا در سال ۱۹۸۰، برای دو هدف کلی زیر در علوم کامپیوتر نظری در نظر گرفته شده بود.

الف. اولین هدف مربوط می‌شود به ساخت زبانی که بوسیله‌ی آن بتوان رفتار و درستی برنامه‌های کامپیوتر را بررسی کرد. از افرادی که در این زمینه تحقیقاتی انجام داده‌اند از هارل، کوزن، تایرن، پرت، هارپلن، پاریخ، گلدبلات[۱۸] [۲۸، ۲۹، ۴۸، ۱۰، ۲۶، ۱۱، ۲۴] می‌توان نام برد.

ب. دومین هدف به مفهوم ارتباطات[۱۹]مربوط می‌شود. ارتباطات به معنای به اشتراک گذاشتن اطلاعات، در واقع یک راه آشکار برای تغییر اطلاعات است که توسط فیلسوفان و زبان‌شناسان هم به صورت عمل‌گرایانه[۲۰] و هم به صورت معناشناسانه مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مطالعات سعی می‌شود که توصیفی از پیش‌شرط‌ها[۲۱] و پس‌شرط‌هایی[۲۲] که در جریان یک ارتباط حضور دارند، مورد بررسی قرار گیرد. نظریه‌پردازان علوم کامپیوتر بخش وسیعی از ارتباطات را تحت عنوان "دسترسی به دانش در یک جامعه‌ی پخشی" مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این زمینه به سه مقاله‌ی اصلی[۲۷، ۴۶، ۱۹] که در سال ۱۹۸۰ نوشته شده‌اند می‌توانید مراجعه کنید.

۳.نظریه‌ی تغییر باور. تلاش برای صوری کردن تغییر باور به عنوان گرایشی در زمینه فلسفه‌ی منطق کمک شایانی به توسعه‌ی منطق شناختی پویا کرده است. تغییر باور برای اولین بار در مقاله‌ای توسط آلکرن، گراندفورس و مکینسون[۲۳] (AGM) صوری‌سازی شد. دو نکته در اینجا قابل ذکر است، اول اینکه مفهوم تجدید[۲۴] نظر (در

---

[۱۵] Truth condition
[۱۶] Veltman
[۱۷] Update
[۱۸] Harel, Kozen, Tiuryn, Pratt, Harplen, Parith, Goldblatt
[۱۹] Communication
[۲۰] Pragmatic
[۲۱] Precondition
[۲۲] Postcondition
[۲۳] Alchurron, Gardenfors, Makinson
[۲۴] Revision

این پایان‌نامه این عملگر را عملگر تغییر باور می‌نامیم چرا که منطق شناختی و منطق شناختی پویا تغییرات شناختی را صوری می‌کنند.) با مفهوم بهنگام کردن متفاوت است. همچنین این عملگر با عملگر منطق پویا نیز متفاوت است.

اولین قدم برای ساختن منطق شناختی پویا در مقاله‌ای که ون‌بن‌تم[۲۵] در سال ۱۹۸۷ در [۱۲] منتشر کرد، برداشته شد. او پیشنهاد کرد که از عملگرهای پویا برای توصیف تغییرات واقعی[۲۶] استفاده شود. همچنین پیشنهاد داد که عملگرهای نظریه‌ی تغییر باور را می‌توان به صورت عملگرهای پویا تعبیر کرد. پلازا[۲۷] در ۱۹۸۹ اولین مقاله در این زمینه را نوشت. پلازا در این مقاله [۴۷] یک منطق برای عملگر آگاهی‌بخشی عمومی[۲۸] معرفی کرد. نتایج مشابهی توسط گربرندی[۲۹] و گرونولد[۳۰] بدست آمد. در حقیقت عملگری که پلازا استفاده کرد کاملاً یک عملگر منطق وجهی پویا نبود. اما در کار گربرندی و گرونولد [۲۲] از عملگرهای منطق وجهی استفاده شده بود. در ادامه توسعه‌های پیچیده‌تری به این منطق تحت عناوین کنش‌های شناختی[۳۱] و مدل‌های کنشی[۳۲] توسط افراد مختلف معرفی شد. مدل‌های کنشی که ما در نظر می گیریم بر اساس تعاریف دو مقاله‌ی [۴، ۵] هستند. دو اصطلاح کنشگر و تغییر اطلاعات که در منطق شناختی پویا به طور گسترده استفاده می‌شوند را برای روشن شدن هر چه بهتر مطلب در ادامه تعریف خواهیم کرد.

تعریف ۴.۱ (کنشگر[۳۳]). منظور ما از کنشگر شخص یا هر چیز دیگری است که اطلاعات مربوط به آن می‌شود و جنبه و نظر فکری مشخصی دارد.

تعریف ۵.۱ (اطلاعات و تغییر اطلاعات[۳۴]). منظور ما از اطلاعات چیزی است که به موضوع خاص و مشخصی (مثلاً به یک فرد) مربوط شود بطوریکه این موضوع تاثیر و نقش مشخصی در جهان دارد. همچنین به این موضوع

[۲۵] Van Benthem
[۲۶] Factual
[۲۷] Plaza
[۲۸] Public announcements
[۲۹] Gerbrandy
[۳۰] Groeneveld
[۳۱] Epistemic actions
[۳۲] Action models
[۳۳] Agent
[۳۴] Information and change of information

مشخص کنشگر می‌گوییم. این اطلاعات به طور کامل در نظر گرفته می‌شود و نه بخشی از یک داده، که آنها را به مثابه‌ی دانش و باور در نظر می‌گیریم. منظورمان از تغییر اطلاعات در این پایان‌نامه تغییر اطلاعاتی است که در اثر ارتباطات (مثلاً ارتباط یک فرد با یک گروه مشخص از افراد) بوجود می‌آید. در واقع ما با نوع خاصی از ارتباطات رو به رو هستیم که در این ارتباطات حقایق و واقعیت‌های جهان تغییری نمی‌کنند. این تغییرات مربوط می‌شوند به کنشگرهایی که این ارتباطات را انجام می‌دهند. در ارتباطاتی که بیش از یک کنشگر وجود دارد، مطالعه‌ی ما مربوط به سیستم‌های با چند کنشگر از تغییر اطلاعات می‌شود.

تعریف ۶.۱ (مدل کنشی). فرض کنید که $\mathcal{L}$ یک زبان منطقی است. یک مدل کنشی روی $\mathcal{L}$ یک ساختار به صورت $U = (\mathrm{S}, \mathrm{R}, pre)$ است که در آن S دامنه‌ی کنش‌ها و R_a رابطه‌ی دسترس‌پذیری برای $a \in A$ روی S است. همچنین تابع پیش‌شرط $pre : \mathrm{S} \longrightarrow \mathcal{L}$ بگونه‌ای است که برای هر $\alpha \in \mathrm{S}$، پیش‌شرط $pre(\alpha) \in \mathcal{L}$ را نسبت می‌دهد. یک کنش شناختی یک مدل نقطه‌ای (U, α) با $\alpha \in \mathrm{S}$ است.

تعریف ۷.۱ (بهنگام‌کردن[۳۵]). مدل نقطه‌ای (M, s) را به همراه $M = (S, R, V)$ و کنش شناختی (U, α) به همراه $\mathrm{U} = (\mathrm{S}, \mathrm{R}, pre)$ درنظر بگیرید. کنش (U, α) بر (M, s) تنها زمانی تعریف می‌شود که $M, s \vDash pre(\alpha)$ و نتیجه یعنی حالت کنشی $((M \otimes \mathrm{U}), (s, \alpha))$ در مدل $(M \otimes \mathrm{U}) = (S', R', V')$، حاصل بهنگام‌شدن مدل M در مدل U، است، که در آن

$$S' := \{(s, \alpha) : s \in S, \alpha \in \mathrm{S} \quad M, s \vDash pre(\alpha)\}.$$

$R'((s, \alpha), (t, \beta))$ اگر و تنها اگر $R_a(s, t)$، $\mathrm{R}_a(\alpha, \beta)$.

$(s, \alpha) \in V'_p$ اگر وتنها اگر $s \in V_p$.

[۳۵] Update

۲.۱ نظریه‌ی تغییر باور

۱.۲.۱ نظریه‌ی کلاسیک تغییر باور و مدل معرفتی آن

نحو نظریه‌ی تغییر باور[۳۶] با تئوری‌ها کار می‌کند. تئوری یک مجموعه از جمله‌ها است که تحت رابطه‌ی استنتاج بسته است. فرض کنید $\perp$ تئوری ناسازگار باشد(شامل تمامی جملات). گسترش $T+\varphi$ از T عبارت است از $T+\varphi := \{\psi : T \cup \{\varphi\} \vdash \psi\}$.

حال عملگر تغییر باور $*$ به صورت زیر تحت عنوان اصول استاندارد نظریه‌ی AGM تعریف می‌شود.

$(*1)$ $T*\varphi$ یک نظریه است؛

$(*2)$ $\varphi \in T*\varphi$ ؛

$(*3-4)$ اگر $\vdash \varphi$ آنگاه داریم $T*\varphi = T$؛

$(*5)$ $T*\varphi = \perp$ اگر و تنها اگر $\vdash \neg\varphi$؛

$(*6)$ اگر $\vdash \varphi \longleftrightarrow \psi$ آنگاه $T*\varphi = T*\psi$؛

$(*7-8)$ اگر $\neg\psi \notin T*\varphi$ آنگاه $T*(\varphi \wedge \psi) = (T*\varphi)+\psi$.

۲.۲.۱ محک رمزی

یک سؤال اساسی در نظریه‌ی تغییر باور برمی‌گردد به اینکه آیا ما در این نظریه می‌توانیم از باور های مرتبه ی بالاتر(باور به باورهای دیگر) سخن بگوییم یا نه. در این مورد توسط رمزی محکی طراحی شد [۴۹] که نشان داد نظریه‌ی تغییر باور نمی‌تواند باورهای مرتبه‌ی بالاتر را صوری کند. محک رمزی[۳۷] نشان می‌دهد که نگاه باور شرطی به نظریه‌ی تغییر باور با نظریه‌ی AGM جمع‌پذیر نیست[۵۱]. در واقع محک رمزی نمی‌تواند از باورهای از مزتبه‌های بالاتر صحبت کند. هر شرطی که ما در مورد باورها به کار می‌بریم بایستی در شرط زیر صدق کند .

$$\text{“اگر } P \text{ آنگاه } Q\text{”} \in T \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad Q \in T*P.$$

---

[۳۶] Belief Revision

[۳۷] Ramsey test

ثابت می‌شود شرطی که در محک رمزی صدق کند در شروط نظریه‌ی تغییر باور صدق نمی‌کند. این شکستی برای نظریه‌ی تغییر باور در مورد تبیین باورهای مرتبه‌ی بالاتر است[۵۱].

۳.۲.۱ نگاهی تاریخی به همکاری نظریه‌ی تغییر باور و منطق شناختی پویا

نظریه‌ی تغییر باور اهمیت شایانی در منطق ریاضی، علوم کامپیوتر، هوش مصنوعی و معرفت‌شناسی دارد. همانطور که قبلاً بیان کردیم در سال ۱۹۸۵ در زبان منطق (بوسیله‌ی عمل‌گرهای منطقی) یک نظریه توسط آلکرن، ردنفورس و مکینسون تحت عنوان AGM در مورد تغییر باور ارائه شد. این نظریه با نگاه پویا نیز مورد مطالعه قرار گرفت. سه نوع نگاه پویا به نظریه‌ی کلاسیک AGM به قرار زیر هستند.

۱) DML منطق وجهی پویا توسط دی ریجک[۳۸] [۵۰].

۲) DDL منطق باور پویا توسط سگربرگ[۳۹] [۵۵].

۳) KM توسط کاتسنوـمندلزون[۴۰][۳۶].

نظریه‌ی کلاسیک تغییر باور و انواع پویای آن مشکلات بسیاری داشتند، برای نمونه:

الف) عدم توانایی گسترش نظریه‌ی کلاسیک AGM به حالت تغییر باور تکرار شونده.

ب) به وجود آمدن تنازع در هنگام به کاربردن نظریه‌ی کلاسیک AGM در حالت باورهای چند کنشگره و باورهای از مرتبه‌ی بالاتر.

ون‌بن‌تم [۱۴، ۱۳] همراه با کارهایی از بالتاگ و اسمت[۴۱] با استفاده از منطق شناختی پویا راهی در توسعه و بهبود نظریه‌ی AGM پیدا کرد. او تفاوت حالت 'ایستا' و 'پویا' در مورد تغییر باور را مورد بررسی و مطالعه قرار داد. در واقع حالت ایستا مربوط می‌شود به باورهای شرطی و حالت پویا مربوط است به باورهایی که پس از عمل تغییر باور به دست می‌آید. نظریه‌ی کلاسیک AGM همان حالت ایستا تغییر باور پویا است. ون‌بن‌تم در هنگام صورت‌بندی تغییر باور پویا متوجه تأثیر چگونگی کسب آگاهی در تغییر باورها شد. تغییر باورها پس از آگاهی‌بخشی عمومی و آگاهی‌بخشی خصوصی متفاوت است. در آگاهی‌بخشی عمومی خبر یا اطلاعات یک

[۳۸] De Rijke
[۳۹] Segerberg
[۴۰] Katsuno-Mendelzon
[۴۱] Baltag ,Smet

دانش همگانی است در حالیکه در آگاهی‌بخشی خصوصی خبر یک آگاهی شخصی است. منطق شناختی پویا یا به اختصار DEL می‌تواند این نگاه‌های کلی کسب آگاهی را تحلیل کند. همچنین یکی دیگر از نکاتی که ون‌بن‌تم مورد توجه قرار داد تاثیر سخت و نرم بودن اطلاعات در تغییر باورها است. در واقع اطلاعات سخت روی دانش ما و اطلاعات نرم روی باورهای ما تأثیر می‌گذارند. با توجه به این مطالب دو نمونه از طرق تجدید نظر باور چند کنشگره عبارتند از تغییر باور تحت اطلاعات سخت و آگاهی‌بخشی عمومی از طریق حقایق نرم. در ادامه تلاش‌هایی برای گسترش نظریه‌ی تجدید نظر باور پویا برای یکی کردن این طرق انجام شد. بهترین نتایج، کار بالتاگ و اسمت بود. آنها با معرفی "بهنگام‌کردن کنشی‌مقدم[۴۲]" توانستند این گسترش‌های مختلف از تغییر باور را به طور کلی مورد بررسی و مطالعه قرار دهند [۸].

۳.۱ نظریه‌ی رسته

نظریه‌ی رسته[۴۳] یک نظریه‌ی جامع ریاضی برای صوری کردن ساختارها و ارتباط بین ساختارها است. نظریه‌ی رسته نقشی اساسی در ریاضیات و علوم کامپیوتر بازی می‌کند. به کمک نظریه‌ی رسته می‌توان خواص جهانی ساختارهایی از یک نوع و ارتباط درونی ساختارهای مختلف را بررسی کرد. در ادامه تعاریف اصلی این شاخه‌ی ریاضی را به طور خلاصه بیان خواهیم کرد[۵۷].

تعریف ۸.۱ (رسته). یک رسته $\mathcal{C}$ از اجزاء زیر تشکیل می‌شود.

- اشیاء: $\mathcal{C}_0 = \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$.
- پیکان‌ها: $\mathcal{C}_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$.
- دو تابع به نام های دامنه و هم دامنه به شکل زیر موجود هستند.

$$dom = s, cod = t : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_0.$$

پیکان f با $s(f) = A$ و $t(f) = A'$ را با نماد $f : A \longrightarrow A'$ و یا $A \xrightarrow{f} A'$ نشان می‌دهیم. همچنین کلاس تمام چنین پیکان‌هایی را با $Hom_{\mathcal{C}}(A, A') = \mathcal{C}(A, A')$ نشان می‌دهیم.

[۴۲] The action-priority update
[۴۳] Category Theory

• برای هر پیکان f دو شیء $dom(f)$ و $cod(f)$ به نام‌های دامنه و هم‌دامنه برای پیکان f وجود دارند. برای پیکان $f : A \longrightarrow B$ در واقع $A = dom(f)$ و $B = cod(f)$ است.

• برای پیکان‌های $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ بگونه‌ای که

$$cod(f) = dom(g)$$

پیکان $g \circ f : A \longrightarrow C$ تحت عنوان ترکیب f و g موجود است.

• برای هر شیء A پیکان $1_A : A \longrightarrow A$ تحت عنوان پیکان همانی موجود است.

همچنین شرایط زیر نیز برقرار هستند.

شرکت‌پذیری: برای پیکان‌های $f : A \longrightarrow B$، $g : B \longrightarrow C$، $h : C \longrightarrow D$ معادله‌ی زیر را داشته باشیم.

$$h \circ (g) = (h \circ g) \circ f.$$

یکتایی: برای پیکان $f : A \longrightarrow B$، معادله‌ی زیر را داشته باشیم.

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f.$$

یک رسته یا کتگوری در واقع هر چیزی است که شرایط بالا را ارضاء کند.

تعریف ۹.۱ (تابعگون). یک فانکتور یا تابعگون[۴۴] بین دو رسته‌ی $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$

$$F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D},$$

یک تابع از اشیاء به اشیاء و از پیکان‌ها به پیکان‌های بین دو رسته است بگونه‌ای که داشته باشیم:

$\bullet F(f : A \longrightarrow B) = F(f) : F(A) \longrightarrow F(B);$

$\bullet F(1_A) = 1_A;$

$\bullet F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$

[۴۴] Functor

این تعریف تابعگون هم‌ورد[۴۵] بود. تعریف تابعگون پادورد[۴۶] مشابه تعریف تابعگون هم‌ورد است با این تفاوت که شرط اول با شرط زیر جایگزین می‌شود.

$\bullet F(f : A \longrightarrow B) = F(f) : F(B) \longrightarrow F(A).$

تعریف ۱.۱۰. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته است.

۱. $\mathcal{C}$ را یک رسته کوچک می‌گوییم هرگاه گردایه‌ی پیکان‌های رسته‌ی $\mathcal{C}_0$ یک مجموعه باشد.

۲. $\mathcal{C}$ را بزرگ می‌گوییم اگر $\mathcal{C}$ کوچک نباشد.

۳. $\mathcal{C}$ را موضعی کوچک می‌گوییم هر گاه برای هر دو شیء C و D گردایه‌ی پیکان‌هایی که دامنه‌شان C و هم‌دامنه‌شان D است، مجموعه باشد.

تعریف ۱.۱۱. فرض کنید که $f : C \longrightarrow D$ و $g : D \longrightarrow C$ دو پیکان، چنان که $g \circ f = id_C$ و $f \circ g = id_D$ هستند. آنگاه f و g را یک یکریختی می‌نامیم و می‌نویسیم $C \cong D$.

تعریف ۱.۱۲. در رسته‌ی $\mathcal{C}$ پیکان $f : C \longrightarrow D$ را یک تک‌پیکان[۴۷] می‌نامیم اگر و تنها اگر برای هر

g، $h : B \longrightarrow C$ داشته باشیم $f \circ g = f \circ h$ آنگاه $g = h$. به خصوص C را (یا به طور دقیق تر پیکان $f : C \longrightarrow D$) را یک زیر شیء D می‌نامیم.

تعریف ۱.۱۳. فرض کنید $F : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ یک تابعگون است.

۱. یک مخروط برای Fشامل یک شیء C از رسته‌ی $\mathcal{C}$، به همراه یک خانواده از پیکان‌ها به شکل زیر است.

$$\mathbf{f} = \langle f_J : C \longrightarrow F(J) \mid J \in \mathcal{O}_{\mathcal{J}} \rangle.$$

---

[۴۵] Covariant
[۴۶] Contravariant
[۴۷] Monomorphism

که در آن برای هر پیکان $j : J \longrightarrow K$ در $\mathcal{J}_1$ دیاگرام زیر جابه جایی است.

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f_J"'] \arrow[dr, "f_k"] & \\ F(J) \arrow[rr, "F(j)"'] & & F(K) \end{tikzcd}$$

۲. یک مخروط ابتدایی برای F یک مخروط $(C, \mathbf{f})$ است. چنانکه برای هر مخروط دیگر $(D, \mathbf{f})$ یک پیکان یکتا $h : D \longrightarrow C$ چنان موجود است که برای هر $j \in \mathcal{J}_0$ داشته باشیم $f_J \circ h = g_J$، که به صورت نموداری به شکل زیر است.

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[ddl, "g_J"'] \arrow[ddr, "g_k"] & \\ & C \arrow[dl, "f_J"] \arrow[dr, "f_k"'] & \\ F(J) \arrow[rr, "F(j)"'] & & F(K) \end{tikzcd}$$

تعریف ۱۴.۱ (حد). فرض کنید که $F : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ یک تابعگون باشد. یک مخروط حدی این دیاگرام را حد گوییم و با علامت زیر نشان می‌دهیم.

$$\mathbf{lim}_{\leftarrow \mathcal{J}} F.$$

یک حد در $\mathcal{C}^{op}$ یک هم حد در $\mathcal{C}$ است.

تعریف ۱۵.۱ (ضرب). یک ضرب، حد یک رسته‌ی گسسته‌ی $\mathcal{J}$ است که شامل یک شیء P و یک پیکان $\pi_j : P \longrightarrow F(J)$ برای هر شیء $J \in \mathcal{J}_0$ است؛ بگونه‌ای که برای هر شیء Z و پیکان‌های $\langle f_J : Z \longrightarrow F(J) \mid J \in \mathcal{O}_{\mathcal{J}} \rangle$ پیکان یکتای $u : Z \longrightarrow P$ وجود دارد بطوریکه برای هر J، داریم $\pi_J \circ u = f_J$.

تعریف ۱۶.۱ (شیء انتهایی). یک شیء انتهایی در واقع چیزی نیست جز یک ضرب ویژه، که آن حد برای دیاگرام تهی است. هر شی از $\mathcal{C}_0$ یک مخروط برای دیاگرام تهی است. در واقع شیء انتهایی یک شی 1 است بگونه‌ای که برای هر شیء C از $\mathcal{C}_0$ یک پیکان یکتای $! : C \longrightarrow 1$ وجود دارد.

تعریف ۱۷.۱ (هم‌سان‌ساز). یک همسان‌ساز یک حد برای دیاگرام زیر است.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

یک مخروط برای این دیاگرام شامل یک شیء Z به همراه یک پیکان $z : Z \longrightarrow A$ است بگونه‌ای که داشته باشیم $f \circ z = g \circ z$. بنابراین یک همسان‌ساز شامل یک شیء E به همراه یک پیکان $e : E \longrightarrow A$ است بگونه‌ای که برای هر Z وجود داشته باشد $u : Z \longrightarrow E$ بگونه‌ای که $z = e \circ u$.

تعریف ۱۸.۱ (قلاب[۴۸]). یک قلاب یک حد برای دیاگرام زیر است.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & A & C \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

تعریف ۱۹.۱ (توان). فرض کنید رسته‌ی $\mathcal{C}$ دارای ضرب دوتایی است. یک توان برای شیء B و C شامل یک شیء C^B به همراه یک پیکان $\epsilon : C^B \times B \longrightarrow C$ است بگونه‌ای که برای هر شیء A و پیکان $f : A \times B \longrightarrow C$ پیکان یکتای $\hat{f} : A \longrightarrow C^B$ وجود دارد بگونه‌ای که $\epsilon \circ (\hat{f} \times 1_B) = f$ برقرار باشد. به طور خلاصه می توانید به دیاگرام زیر توجه کنید.

$$\begin{tikzcd} C^B & C^B \times B \arrow[r, "\epsilon"] & C \\ A \arrow[u, "\hat{f}"] & A \times B \arrow[u, "\hat{f} \times 1_B"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

قضیه ۱.۳.۱. *یک رسته تمام حدهای متناهی‌اش را دارد اگر و تنها اگر تمام ضربهای متناهی و همسان‌سازها (قلاب‌ها و شیء انتهایی) را داشته باشد.*

اثبات. ر.ک.[۵۷]. ∎

Pullback[۴۸]

فصل ۲

تغییر باور ایستا

نظریه‌ی تغییر باور ایستا[۱] درباره‌ی توانایی نشان دادن تغییر باورها به صورت باورهای شرطی است. یک جمله‌ی باور شرطی $B_a^P Q$ می‌تواند به عنوان بیان کننده‌ی "استعداد باور" یا "طرح باور کنشی" در نظر گرفته شود. برای کنشگر مشخص شده است که باور کند که Q برقرار بوده است اگر یادگرفته بوده باشد که P برقرار بوده است. معناشناسی‌ای که برای باورهای شرطی بیان می‌کنیم با استفاده از مدل‌های توجیه‌پذیر و مدل‌های باور شرطی است. ابتدا KB -مدل را به عنوان یک مدل شناختی برای باور و معرفت معرفی می‌کنیم و ارتباط آن با نظریه‌ی تغییر باور را بیان می‌کنیم. در ادامه همین مطالعه را بوسیله‌ی مدل‌های باور شرطی و مدل‌های توجیه‌پذیر بیان می‌کنیم. نشان می‌دهیم که می‌توان دو نماد معرفت (آیمن[۲] $S5$ [۳]) و باورهای ساده‌ی (غیر شرطی) را بوسیله‌ی باورهای شرطی تعریف کرد. همچنین خود باورهای شرطی را می‌توان به صورت عملگر تغییر باور یگانی $*_a P$ بیان کرد. این عملگر نشان‌دهنده‌ی تمام باورهای تغییر کرده‌ی کنشگر a پس ازدریافت P است. همچنین در ادامه عملگر باور متقن $\square_a P$ که یک نماد ضعیف دانش فسخ‌ناپذیر است را معرفی خواهیم کرد و درباره‌ی منطق این دو عملگر باور شرطی و دانش فسخ‌ناپذیر صحبت می‌کنیم.

۱.۲ KB -مدل و منطق باور-معرفت

یک قاب باور-معرفت، یک قاب کریپکی به شکل $(S, \longrightarrow_a, \sim_a)_{a\in\mathcal{A}}$ است که در آن S مجموعه‌ای از حالت‌ها و $\longrightarrow_a$، $\sim_a$ به ترتیب باور و معرفت کنشگر a را محاسبه می‌کنند.

[۱] Static Belief Revision

[۲] Aumann

یک قاب باور-معرفت بایستی در شرایط زیر صدق کند.

۱) هر $\sim_a$ بازتابی است. $s \sim_a s$؛

۲) اگر داشته باشیم $s \sim_a t$ آنگاه داریم $s \longrightarrow_a w$ اگر و تنها اگر $t \longrightarrow_a w$ ، و همچنین $s \sim_a w$ اگر و تنها اگر $t \sim_a w$؛

۳) اگر $s \longrightarrow_a t$ آنگاه $s \sim_a t$؛

۴) برای هر $s \in S$ یک $t \in S$ وجود دارد بطوریکه $s \longrightarrow_a t$.

رابطه‌ی اول درستی معرفت را بیان می‌کند. دومین رابطه درون‌نگریی را نشان می‌دهد بدین معنی که فرد به‌آنچه که باور و یا معرفت دارد یا ندارد، معرفت دارد. رابطه‌ی سوم می‌گوید که فرد به هر آنچه معرفت دارد، باور دارد. در انتها رابطه‌ی آخر می‌گوید که باورها با هم سازگارند. یک مدل باور-معرفت یک مدل کریپکی با قاب باور-معرفت است.

با جابه‌جایی رابطه‌ی دسترس‌پذیری با تابع تصویر می‌توانیم یک مدل هم‌جبر به دست بیاوریم. (تابع تصویر یک رابطه‌ی $R \subseteq S \times S$، یک تابع به شکل $\widehat{R} : S \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ ، $\widehat{R}(s) := \{t \in S : sRt\}$ است.)

یک KB -قاب یک ساختار به شکل $(S, \bullet_a, \bullet(a))_{a \in \mathcal{A}}$ است که در آن S یک مجموعه از حالت‌ها و $\bullet_a$، $\bullet(a) : S \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ توابعی تصویری هستند که در روابط زیر صدق می‌کنند.

۱) $s \in s(a)$؛

۲) اگر $t \in s(a)$ آنگاه $s_a = t_a$، $s(a) = t(a)$؛

۳) $s_a \subseteq s(a)$؛

۴) $s_a \neq \emptyset$.

توابع $\bullet_a$، $\bullet(a)$ را توابع نمایش می‌نامیم. s_a نمایش باور S برای a است (نظریه‌ی a درباره‌ی S). همچنین $s(a)$ نمایش شناختی S برای a است (معرفت a درباره‌ی S). به‌راحتی می‌توان نشان داد که این دو مدل هم‌ارز هستند. برای یک مدل باور-معرفت S هر زیر مجموعه‌ی $P \subseteq S$ از مجموعه‌ی حالت‌های S را یک S-گزاره می‌نامیم.

به راحتی می‌توانیم با توجه به تعاریف وجهی استاندارد کریپکی، S-گزاره‌های B_aP (شخص a باور دارد به P)، K_aP (شخص a معرفت دارد به P) را تعریف کنیم.

$s \in B_aP$ اگر و تنها اگر $s_a \subseteq P$.

$s \in K_aP$ اگر و تنها اگر $s(a) \subseteq P$.

$s \in B_aP$ یعنی کنشگر a به گزاره‌ی P باور دارد و $s \in K_aP$ یعنی کنشگر a گزاره‌ی P را می‌داند. می‌توانیم عمگر ها را روی S-گزاره‌ها نیز تعریف کنیم. نقیض $\neg P := S \backslash P$، عطف $P := P \cap Q$، باور درست عمومی $EbP := \bigcap_{a\in\mathcal{A}} B_aP$، معرفت عمومی $EkP := \bigcap_{a\in\mathcal{A}} K_aP$، و نها یتاً باور همگانی $CbP := \bigcap_{n\geq 0} (Eb)^n P = P \cap EbP \cap Eb(EbP) \cap \cdots$ و معرفت همگانی را می‌توانیم تعریف کنیم $CkP := \bigcap_{n\geq 0} (Ek)^n P = P \cap EkP \cap Ek(EkP) \cap \cdots$.

نحو منطق باور-معرفت (KB) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid B_a\varphi \mid K_a\varphi \mid Cb\varphi \mid Ck\varphi.$$

در مورد معناشناسی، تابع ارزش به صورت بازگشتی تعریف می‌شود و نماد $s \vDash_S \varphi$ را برای $s \in \| \varphi \|_S$ استفاده می‌کنیم.

همچنین باور و معرفت عمومی را به صورت $Eb\varphi := \bigwedge_{a\in\mathcal{A}} B_a\varphi$ و $Ek\varphi := \bigwedge_{a\in\mathcal{A}} K_a\varphi$ تعریف می‌کنیم.

۱.۱.۲ نظریه‌ی تغییر باور و KB -مدل

تغییر نظریه‌ی تغییر : AGM معرفت‌شناسانه برای بکاربستن نظریه‌ی تغییر باور در زبان باور-معرفت نیاز داریم که اصل $(\ast 5)$ در نظریه‌ی تغییر باور که به اصل موفقیت[۳] معروف است را تغییر دهیم. این اصل می‌گویید که فرد در مورد باور یا دانشش مطمئن است. به عبارت دیگر اگر چیزی دانسته شود دیگر نبایستی تغییر کند. ما این اصل را با اصل معرفتی آن که به شکل زیر است تغییر می‌دهیم.

$(\ast 5e)$ $T \ast \varphi = \perp$ اگر و تنها اگر $T \vdash K\neg\varphi$ $((K\neg\varphi) \in T)$.

[۳] Success postulate

مدلی که توسط اصول $(*1)$، $(*2)$، $(*3-4)$، $(*5e)$، $(*6)$ و $(*7-8)$ بدست می‌آیند، مدل معرفتی نظریه‌ی AGM می‌نامیم. اگر فرض کنیم که دانش قاعده‌ی ضرورت را ارضاء می‌کند، $(\vdash \varphi \Longrightarrow \vdash K\varphi)$ با توجه به $(*5e)$ داریم $(*5)$ $T * \varphi = \perp$ اگر و تنها اگر $\vdash \neg\varphi$.

نظریه‌ی AGM با چندین کنشگر برای به‌کار بردن اصول نظریه‌ی معرفتی AGM در منطق BKL به نوع چند کنشگره معرفتی AGM نیاز داریم. بنابراین عمگر K_a در اصل $(*5)$ را برای هر کنشگر برچسب‌گذاری می‌کنیم. همچنین بایستی توجه کنیم که نماد تئوری و عملگر تغییر به کنشگرها مربوط می‌شوند. یک مجموعه از جمله‌ها ممکن است یک تئوری برای کنشگر a باشند ولی برای b یک تئوری نباشند. در نظریه‌ی AGM فرض می‌شود که تئوری به طور کامل باورهای کنشگرها در مورد جهان را توصیف می‌کند. تئوری کنشگر a نمی‌تواند باورهای کنشگر b را توصیف کند. می‌توانیم برای هر کنشگر a یک خانواده از تئوری‌های $\mathcal{T}_a$ یا a-تئوری‌ها را در نظر بگیریم، که در واقع یک مجموعه از جمله‌ها که تحت استنتاج بسته در منطق BKL ، هستند. همچنین بایستی در اصل $(*5e)$، عملگر تغییر را برای کنشگر a روی $\mathcal{T}_a$ در نظر بگیریم. پس در اصول چند کنشگره معرفتی AGM برای هر کنشگر a، خانواده‌ی $\mathcal{T}_a \subseteq \mathcal{P}(BKL)$ شامل مجموعه جملاتی در زبان منطق BKL را در نظر می‌گیریم. آنها را a-تئوری می‌نامیم. عملگر تغییر $*_a : \mathcal{T}_a \times BKL \longrightarrow \mathcal{T}_a$ که a-تئوری‌ها و جملات منطق BKL را به a-تئوری‌های جدید می‌برد را نیز در نظر می‌گیریم. اصول زیر بایستی صادق باشند.

(T۱) $\perp \in \mathcal{T}_a$ ($\perp := BKL$ یک تئوری ناسازگار شامل تمام جملات BKL).

(T۲) هر $T \in \mathcal{T}_a$ تحت استنتاج بسته است (توجه شود به برهان تمامیت نظام منطقی BKL [۳۷]).

(T۳) برای هر $\varphi \in BKL$ و هر $T \in \mathcal{T}_a$ داشته باشیم $K_a\varphi$ یا $(\neg K_a\varphi)$.

(T۴) تمام اصول نظریه‌ی AGM معرفتی بگونه‌ای با عملگرهای معرفت و تغییر K_a، $*_a$ برچسب‌گذاری شده باشند.

نکته. به توجه به $B_a\varphi \longrightarrow K_a\varphi$، اصول **(T۲)** و **(T۳)** برای هر $\varphi \in BKL$ و هر $T \in \mathcal{T}_a$ داریم $B_a\varphi \in T$ یا $(\neg B_a\varphi) \in T$.

ساختار معنایی برای نظریه‌ی تغییر باور. برای گسترش معناشناسی مدل (شناختی) چند کنشگره AGM فرض کنید KB -مدل **S** داده شده است. بایستی اصول موضوعه‌ی بالا را با نحو مناسب بیان کنیم. **S**-تئوری (یک زیر مجموعه از نقاط S) را با یک "تئوری" به عنوان یک مجموعه از جمله‌ها جایگزین می‌کنیم و همچنین جمله‌ها را با S-گزاره‌ها تعویض می‌کنیم. هر **S**-تئوری $T \subseteq S$ به طور طبیعی یک تئوری نحوی به صورت $th(T) = \{\phi \in BKL : t \vDash_{\mathbf{S}} \phi \forall t \in T\}$ تعریف می‌کند. همچنین علاوه بر اصول بالا به اصل دیگری نیز نیازمندیم که نظریه‌ی تغییر باور ما را با تئوری ما در مورد باورها سازگار کند که با اصل **(T۰)** نشان می‌دهیم.

(T۰) برای هر کنشگر a باورهای کنونی کنشگر یک a-تئوری است.

همچنین عملگر $T + \phi$ و بستار استنتاجی (بستار قیاسی) را با متناظر معنایشان تعویض می‌کنیم. برای این کار بایستی توجه کرد که رابطه‌ی جزئی روی تئوری‌ها به طور نحوی برای تئوری‌های متناظرشان در مدل نیز برقرار باشد بدین معنا که برای **S**-تئوری‌های $T, T' \subseteq S$ داشته باشیم $T \subseteq T'$ اگر و تنها اگر $th(T') \subseteq th(T)$. تئوری ناسازگار $\perp$ با مجموعه‌ی تهی $\varnothing \subseteq S$ تعبیر می‌شود. بستار قیاسی دو تئوری نحوی با اشتراک تعبیرشان متناظر می‌شود. بنابراین بسط $T + P$ برای تئوری معنایی $T \subseteq S$ و تئوری گزاره‌ای $P \subseteq S$ توسط اشتراک $T \cap P$ تعبیر می‌شود. حال با توجه به این موارد معناشناسی اصول AGM معرفتی را بیان می‌کنیم.

ساختار معنایی اصول AGM شناختی. فرض کنید KB -مدل، **S** مفروض باشد، یک تئوری AGM تغییر باور به روی **S**، برای هر کنشگر a، یک خانواده از S-تئوری‌های به شکل $\mathcal{T}_a \subseteq \mathcal{P}(S)$ است که آنها را a-تئوری‌های روی **S** می‌نامیم. همچنین عملگر تغییر باور $*_a : \mathcal{T}_a \times \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{T}_a$ برای هر $T \in \mathcal{T}_a$، $P \subseteq S$، با شروط زیر تعریف می‌شود.

(T۰) برای هر $s \in S$ داریم $s_a \in \mathcal{T}_a$؛

(T۱) $\varnothing \in \mathcal{T}_a$؛

(T۲) اگر $T \in \mathcal{T}_a$ آنگاه برای هر $s, t \in T$ داریم $s_a = t_a$ و $s(a) = t(a)$؛

(۱*) $T *_a P \in \mathcal{T}_a$؛

(۲*) $T *_a P \subseteq P$؛

(*۳-۴) $T *_a P = T$؛

(*۵e) $T *_a P = \varnothing$ اگر و تنها اگر $T \subseteq K_a \neg P$ ($T(a) \cap P = \varnothing$)؛

(*۶) اگر $P = Q$ آنگاه $T *_a P = T *_a Q$؛

(*۷-۸) اگر $T *_a P \cap Q \neq \varnothing$ آنگاه $T *_a (P \cap Q) = T *_a P$.

از نماد $T(a) := \{t(a) : t \in T\}$ برای نشان دادن "دانش a در T" استفاده می‌کنیم. همانطور که دیده می‌شود معادل اصل معناشناختی اصل **(*۶)** زائد است چرا که همیشه در این شرط ارضاء می‌شود.

۲.۲ مدل‌های باور شرطی

ساختاری را معرفی می‌کنیم که از لحاظ معناشناختی معادل نظریه AGM (معرفتی چند کنشگره) است در حالی که در فرمول‌بندی بسیار ساده‌تر است. یک قاب باور شرطی به صورت $(S, \{\bullet_a^P\}_{a \in \mathcal{A}, P \subseteq S})$ است که شامل یک مجموعه از حالت‌های S، یک خانواده از توابع نمایشی (باور) شرطی، برای هر کنشگر a و هر حالت ممکن $P \subseteq S$ است بطوریکه در شرایط زیر صدق می‌کند.

(۱) اگر $s \in P$ آنگاه $s_a^P \neq \varnothing$؛

(۲) اگر $P \cap s_a^Q \neq \varnothing$ آنگاه $s_a^P \neq \varnothing$؛

(۳) اگر $t \in s_a^P$ آنگاه $t \in s_a^P = t_a^P$؛

(۴) $s_a^P \subseteq P$؛

(۵) $t \in s_a^{P \cap Q} = s_a^P \cap Q$ اگر $s_a^P \cap Q \neq \varnothing$.

یک مدل باور شرطی[۴] (به طور خلاصه، CDM) یک مدل کریپکی است که قاب آن را CD -قاب می‌نامیم. s_a^P یک نمایشگر شرطی است که راه‌هایی که یک حالت s برای کنشگر a (جهان واقع) به نظر می‌رسد، زمانی که اطلاعات P (محتمل نه لوزماً حقیقت) را دریافت می‌کند، مشخص می‌کند.

به طور دقیق‌تر زمانی که جهان واقع s است کنشگر a پس از دریافت اطلاعات P اعتقاد پیدا خواهد کرد که هر کدام از حالت‌های $s' \in s_a^P$ ممکن است که جهان واقع باشند (قبل از دریافت اطلاعات P).

[۴] Conditional Doxastic Model

نمایشگر باور شرطی معرفت $s(a)$ که در واقع معرفتی است که توسط کنشگر a درباره‌ی حالت s بدست می‌آید، می‌تواند به صورت اجتماع تمام نمایشگرهای باور شرطی تعریف شود $s(a) = \bigcup_{Q \subseteq S} s_a^Q$. معادله‌ی اول در تعریف قاب باور شرطی نشان‌دهنده‌ی درستی دانش است. معادله‌ی دوم نشان‌دهنده‌ی موفقیت تغییر باور زمانی که سازگار با معرفتمان است (اگر چیزی غلط دانسته نشود آنوقت می‌توانیم آن را به عنوان یک فرض قبول کنیم). معادله‌ی سوم نشان‌دهنده‌ی درون‌نگری تمام باورها است. افراد به باورهای شرطی‌شان معرفت دارند. بنابراین آنها نمی‌توانند باورهایشان نسبت به خودشان را تغییر دهند. معادله‌ی چهارم بیان می‌کند که ما به طور پیش فرض به مفروضات اعتقاد داریم (مفروضات را درست در نظر می‌گیریم). معادله‌ی آخر بیانگر خاصیت مینیمم بودن خاصیت تغییر است، بدین معنی که زمانی که با اطلاعات جدید P مواجه می‌شویم افراد باورهای (شرطی) s_a^P قبلی خود را حفظ می‌کنند.

این اصول برای تعریف KB -قاب کافی است. در واقع هر CD -قاب یک KB -قاب است، برای بررسی این موضوع کافی است $s_a = s_a^S$ را در نظر بگیرید. می‌توانیم باورهای غیر شرطی‌مان را نیز نسبت به حقایق بدیهی، شرطی فرض کنیم. به همین صورت هر KB -قاب را می‌توانیم به صورت $(S, \{\longrightarrow_a^P\}_{a \in \mathcal{A}, P \subseteq S})$ در نظر بگیریم که شرایط زیر را ارضاء می‌کند.

۱) اگر $s \in P$ آنگاه حالت t چنان موجود است که $s \longrightarrow_a^P t$؛

۲) اگر $s \longrightarrow_a^Q t \in P$ آنگاه حالت $w \in S$ چنان موجود است که $s \longrightarrow_a^P w$؛

۳) اگر $s \longrightarrow_a^P t$ آنگاه برای هر حالت $w \in S$ داریم $s \longrightarrow_a^Q w$ اگر و تنها اگر $t \longrightarrow_a^Q w$؛

۴) اگر $s \longrightarrow_a^P t$ آنگاه $t \in P$؛

۵) اگر $s \longrightarrow_a^Q t \in Q$ آنگاه برای هر $w \in S$ داریم $s \longrightarrow_a^P w$ اگر و تنها اگر $s \longrightarrow_a^Q w \in Q$.

بنابراین KB -قابها و CD -قابها معادل هستند.

با به کار بستن ساختارهای کریپکی روی شرطی باور $s \longrightarrow_a^P t$، عملگر جدید $B_a^P Q$ را روی S-گزاره‌ها به دست می‌آوریم،که در واقع بیانگر باورهای شرطی است و به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$B_a^P Q := \{s \in S : s_a^P \subseteq Q\}.$$

عبارت فوق به این صورت خوانده می‌شود که کنشگر a باور دارد به Q به شرط P . به شکلی دقیق‌تر می‌توان بیان کرد که اگر کنشگر P را یاد می‌گرفت، آنوقت (پس از یادگیری) او باور خواهد کرده بود که Q در حالت واقع مناسب (درست) بوده است (قبل از یادگیری). توجه کنید که باورهای شرطی را به راحتی می‌توان به صورت غیر شرطی بیان کرد $B_a^S Q = B_a Q$.

به همین شکل می‌توانیم عملگر دانش $K_a P := \{s \in S : s(a) \subseteq P\}$ را تعریف کنیم، که دارای خاصیت‌های زیر است.

$$K_a P = \bigcap_{Q \subseteq S} B_a^Q P = B_a^{\neg P} \varnothing = B_a^{\neg P} P.$$

به همین صورت نوع شرطی باور عمومی، باور درست همگانی، دانش عمومی، دانش همگانی، به صورت $Eb^P Q := \bigcap_{a \in \mathcal{A}} B_a^P Q$، $Cb^P Q := \bigcap_{n \geq 0} (Eb^P)^n Q = Q \cap Eb^P Q \cap Eb^P (Eb^P Q) \cap \cdots$، $K_a^P Q := K_a (P \longrightarrow Q)$، $Ek^Q := \bigcap_{a \in \mathcal{A}} K_a^P Q$، $Ck^P Q := \bigcap_{n \geq 0} (Ek^P)^n Q$ تعریف می‌شود.

قضیه ۱.۲.۲. *هر CDM به طور معنایی معادل یک KB -مدل برای یک نظریه‌ی AGM است.*

اثبات. فرض کنید که یک نظریه‌ی AGM روی یک KB -مدل داده شده است. تعریف می‌کنیم $s_a^P = s_a *_a P$. s_a^P تمام اصول CDM را ارضاء می‌کند. برای عکس مدل CDM را مفروض بگیرید. قرار دهید $\mathcal{T}_a = \{s_a^P : s, P \subseteq S\}$. عملگر تغییر $T *_a Q$ را برای تئوری $T = s_a^P \in \mathcal{T}_a$ بدین شکل تعریف می‌کنیم که اگر $P \cap s(a) = \varnothing$ باشد قرار می‌دهیم $s_a^P *_a Q = \varnothing$، و اگر $P \cap s(a) \neq \varnothing$ ولی $P \cap Q \cap s(a) = \varnothing$ باشد قرار می‌دهیم $s_a^P *_a Q = s_a^Q$. در غیر این صورت قرار می‌دهیم $s_a^P *_a Q = s_a^P = s_a^P \cap Q = s_a^Q \cap P$. بررسی شرایط KB -مدل سرراست است. ∎

مثال ۱. هر KB -مدل یک CDM است. درحقیقت ما می‌توانیم به راحتی هر KB -مدل را به یک CDM تبدیل کنیم. تنها کافی است تعریف کنیم $s_a^P = s_a \cap P$، اگر $s_a \cap P \neq \varnothing$ باشد و در غیر این صورت قرار دهیم $s_a^P = s(a) \cap P$. البته این یکی از راه‌هایی است که می‌توانیم یک KB -مدل را به CDM تبدیل کنیم. در واقع این حالت خاصی است که در آن این اصل که "هر زمان که باورهایت با حقایق مغایرت و تناقض داشتند آنها را

رها کن و با آنچه که می دانی بمان" در نظر گرفته شده است.

۱.۲.۲ منطق باور شرطی (CDL)

ما منطق BKL را بگونه‌ای تغییر می‌دهیم تا عملگرش، باور شرطی شود. نحو منطق CDL به صورت زیر است.

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid \varphi\wedge\psi \mid B_a^{\varphi}\varphi \mid Cb^{\varphi}\varphi \mid Ck^{\varphi}\varphi.$$

معناشناسی‌ای که توسط تابع تعبیر $\|\bullet\|_{\mathrm{s}}: CDL \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ تعریف می‌شود مطابق مدل‌های CDM است. عملگر دانش به شکل $K_a\phi := B_a^{\neg\phi}\perp$ تعریف می‌شود ($\perp = p\wedge\neg p$). یا بطور معادل $K_a\phi := B_a^{\neg\phi}\phi$. این معناشناسی با معناشناسی‌ای که قبلاً در مورد دانش بیان کردیم یکسان است. $\|K_a\phi\| := K_a \|\phi\|_{\mathrm{s}}$، همچنین تعریف می‌کنیم $K_a^{\theta}\varphi := K_a(\theta\longrightarrow\varphi)$، $Eb^{\theta}\varphi := \bigwedge_{a\in\mathcal{A}} B_a^{\theta}\varphi$، $Ek^{\theta}\varphi := \bigwedge_{a\in\mathcal{A}} K_a^{\theta}\varphi$.

قضیه ۲.۲.۲. *اثبات تمامیت و درستی برای CDM نیازمند تمام اصول و قواعد منطق کلاسیک گزاره‌ها و قاعده‌ی ضرورت برای تمام فرمول‌های وجهی (از $\vdash\varphi$ استنتاج می‌شود $\vdash B_a^{\psi}\varphi$ و همچنین از $\vdash\varphi$ استنتاج می‌شود $\vdash Cb_a^{\psi}\varphi$) به همراه اصول زیر است.*

(نرمال بودن) $\vdash B_a^{\theta}(\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow (B_a^{\theta}\varphi \longrightarrow B_a^{\theta}\psi);$

$\vdash Cb_a^{\theta}(\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow (Cb_a^{\theta}\varphi \longrightarrow Cb_a^{\theta}\psi);$

$\vdash Ck_a^{\theta}(\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow (Ck_a^{\theta}\varphi \longrightarrow Ck_a^{\theta}\psi);$

(درستی معرفت) $\vdash K_a\varphi \longrightarrow \varphi;$

(پایداری معرفت) $\vdash K_a\varphi \longrightarrow B_a^{\psi}\varphi;$

(درون‌نگری کامل) $\vdash B_a^{\psi}\varphi \longrightarrow K_a B_a^{\psi}\varphi;$

$\vdash \neg B_a^{\psi}\varphi \longrightarrow K_a \neg B_a^{\psi}\varphi;$

(فرض مقبول بودن مفروضات) $\vdash B_a^{\varphi}\varphi;$

(مینیمال بودن تغییر) $\vdash \neg B_a^{\varphi}\neg\psi \longrightarrow (B_a^{\varphi\wedge\psi}\theta \longleftrightarrow B_a^{\varphi}(\psi \longrightarrow \theta));$

(اصول نقطه ثابت) $\vdash Cb_a^{\theta}\varphi \longrightarrow \varphi \wedge Eb^{\theta}Cb_a^{\theta};$

$\vdash Ck_a^{\theta}\varphi \longrightarrow \varphi \wedge Eb^{\theta}Ck_a^{\theta};$

(اصول استقراء) $\vdash Cb_a^{\theta}(\varphi \longrightarrow Eb^{\theta}\varphi) \longrightarrow (\varphi \longrightarrow Cb_a^{\theta});$

$\vdash Ck_a^{\theta}(\varphi \longrightarrow Ek^{\theta}\varphi) \longrightarrow (\varphi \longrightarrow Ck_a^{\theta}).$

اثبات. مشابه اثبات قضیه‌ی۲.۳.۲ در ضمیمه است. ∎

۳.۲ نظریه‌ی تغییر باور ایستا با استفاده از مدل‌های توجیه‌پذیر

۱.۳.۲ مدل‌های توجیه پذیر : در حالت یک کنشگره

یک قاب یک کنشگره توجیه‌پذیر یک ساختار $(S, \leq)$، شامل مجموعه‌ی S از حالت‌ها و رابطه‌ی خوش ترتیب $\leq$ (یک رابطه‌ی دوتایی بازتابی، متعدی روی S بطوریکه هر زیر مجموعه‌ی ناتهی آن عضو مینیمم دارد.) است.

برای نشان دادن اعضای مینیمم یک زیر مجموعه‌ی ناتهی S از نماد زیر استفاده می‌کنیم.

$$Min_{\leq}P := \{s \in P : s \leq s', \quad \forall s' \in P\}.$$

شرط خوش ترتیبی بیان می‌کند که برای هر $P \subseteq S$، اگر $P \neq \emptyset$ آنگاه $Min_{\leq}P \neq \emptyset$.

تعبیر $s \leq t$ به این معنا است که "حالت s حداقل به اندازه ی حالت t توجیه‌پذیر است" . نقاط مینیمم در $Min_{\leq}P$ در واقع توجیه‌پذیرترین نقاطی هستند که P در آنها درست است. همچنین برای اینکه بیان کنیم s از t توجیه‌پذیرتر است از نماد $s < t$ استفاده می‌کنیم، $s < t$ اگر و تنها اگر $s \leq t$ اما $t \nleq s$. برای نقاطی که یکسان توجیه‌پذیرند از نماد $\cong$ استفاده می‌کنیم. $s \cong t$ اگر و تنها اگر $s \leq t$ و $t \leq s$.

تعریف ۱.۲ (S-گزاره‌ها و مدل توجیه‌پذیر[۵])**.** قاب شناختی توجیه‌پذیر S را در نظر بگیرید. هر S-گزاره یک زیر مجموعه‌ی $P \subseteq S$ است. می‌گوییم که حالت s، گزاره‌ی P را ارضاء می‌کند اگر و تنها اگر $s \in P$. همانطور که مشاهده می‌کنید مدل‌های توجیه‌پذیر یک نوع خاصی از مدل‌های کریپکی هستند. بنابراین مدل‌های توجیه‌پذیر را ساختارهایی به شکل $\mathbf{S} = (S, \leq, \| \,.\, \|)$ در نظر می‌گیریم بطوریکه شامل قاب توجیه‌پذیر $(S, \leq)$ به همراه تابع ارزیاب $\| \,.\, \| : \Phi \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ هستند، بطوریکه هر گزاره‌ی اتمی را به یک S-گزاره نسبت می‌دهد.

تعابیر. عناصر S نشانگر حالت‌های ممکن یا جهان‌های ممکن هستند. جمله‌ی اتمی $p \in \Phi$ حقایق هستی شناسانه[۶] (غیر باورمند[۷]) را بیان می‌کنند که می‌بایستی در یک جهان ممکن برقرار باشند یا نباشند. تابع ارزش به ما می‌گوید که چه حقایقی در چه جهان‌هایی برقرار هستند. رابطه‌ی $\leq_a$ باورهای (شرطی) کنشگرها را درباره‌ی حالت سیستم مشخص می‌کند، بدین معنا که اگر به کنشگر اطلاع داده شود که حالت سیستم s یا t است او باور خواهد کرد که سیستم در توجیه‌پذیرترین حالت است بدین معنا که اگر $s < t$ باشد آنگاه کنشگر باور خواهد کرد که سیستم در حالت s است. اگر $t < s$ باشد کنشگر باور خواهد کرد که سیستم در حالت t است؛ در غیر این موارد اگر $s \cong t$، کنشگر نسبت به این دو حالت و یا موقعیت بی‌تفاوت است. در واقع کنشگر نمی‌تواند تصمیم بگیرد که کدام حالت بر دیگری ترجیح دارد.

Plausibility Model[۵]
Ontic[۶]
Non-doxastic[۷]

تعریف ۲.۲ (عملگرهای گزاره‌ای و وجهی). برای هر مدل S، برای S-گزاره‌ها عملگرهای بولی زیر را داریم.

$$P \vee Q := P \cup Q، \; P \wedge Q := P \cap Q.$$

$$P \longrightarrow Q := \neg P \vee Q، \; \neg P := S \setminus P.$$

همچنین عملگرهای بولی ثابت $\top_S := S$ و $\bot_S := \varnothing$ را داریم. نامتناهی عطف و فصل نیز به همین شکل به‌راحتی قابل تعریف هستند. هر رابطه‌ی $R \subseteq S \times S$ روی S یک عملگر وجهی

$[R] : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ به شکل زیر تعریف می‌کند.

$$[R]Q := \{s \in S : \forall t(sRt \Rightarrow t \in Q)\}.$$

تعریف ۳.۲ (رابطه‌ی دسترس‌پذیری برای باور، باور شرطی و دانش). برای بحث در مورد باور، رابطه‌ی دسترس‌پذیری باور $\longrightarrow$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$s \to t$ اگر و تنها اگر $t \in Min_{\leq} S$.

تعبیر این رابطه‌ی دسترس‌پذیری به این شکل است، زمانی که جهان واقع s است کنشگر باور خواهد کرد که هر کدام از جهان‌های t با $s \to t$ ممکن است که جهان واقع باشند. این تعبیر مطابق با تعبیر رابطه‌ی جزئی‌مان است. جهان‌هایی که باور کرده ایم، ممکن به نظر می رسند، نقاط مینیمم (دارای بیشترین توجیه‌پذیری) هستند.
درباره‌ی باورهای شرطی به طور مشابه می‌توانیم رابطه‌ی دسترس‌پذیری را برای S-گزاره‌های $P \subseteq S$ به شکل زیر تعریف کنیم.

$s \to^P t$ اگر و تنها اگر $t \in Min_{\leq} P$.

این رابطه به این صورت تعبیر می‌شود، زمانی که جهان واقع s باشد، اگر کنشگر اطلاعات P (که در جهان واقع درست هستند.) را بدست آورد، آنگاه او باور خواهد کرد که هرکدام از جهان‌های t با $s \to t$ ممکن است که جهان واقع باشند.

نهایتاً در مورد دانش رابطه‌ی امکانپذیری شناختی (تمایزناپذیری) $\sim$ را به شکل زیر معرفی می‌کنیم.

$s \sim t$ اگر و تنها اگر $s, t \in S$.

بنابراین در حالت یک کنشگره، تمام حالت‌های واقع در S فرض می‌شود که به طور شناختی ممکن می‌باشند. تنها چیزی که با اطمینان کامل در مورد جهان حاضر می‌دانیم این است که متعلق به S است. این فرض در بررسی حالت یک کنشگره طبیعی است چرا که نقاطی که می‌دانیم غیر ممکن هستند از منظر منطق باور شرطی نامربوط و بی ثمر است. بنابراین آنها را به‌راحتی می‌توانیم از مطالعه‌ی خودمان حذف کنیم.

تعریف ۴.۲ (دانش و (باور) شرطی)**.** دانش و باور (شرطی) را به عنوان عملگرهای وجهی برای رابطه‌ی دسترس‌پذیری شناختی و باور (شرطی) به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$KP := [\sim]P;$$

$$BP := [\to]P;$$

$$B^{Q}P := [\to^{Q}]P.$$

KP بیان می‌کند که کنشگر P را می‌داند. این تعریف قوی دانش در معنای لایب نیتسی "درست در تمام جهان های ممکن" است. BP را می‌خوانیم "p باور شده است" و همچنین $B^{Q}P$ "P باور شده است تحت (یا به شرط) Q " . باور شرطی گزاره‌ی $s \in B^{Q}P$ را به این صورت تعبیر می‌کنیم که اگر جهان واقع s باشد آنگاه کنشگر Q را (در همان جهان واقع) باورخواهد کرد اگر به P (در همان جهان واقع و قبل از تغییر باورش) باور پیدا کند. به عبارت دیگر باور شرطی $s \in B^{Q}P$ در واقع طرح‌های کنشگر را در مورد چیزهایی که در مورد جهان حاضر پس از دریافت اطلاعات (باورپذیر) باور می‌کند را توصیف می‌کند.

۲.۳.۲ مدل توجیه‌پذیر با چند کنشگر

در حالت چند کنشگره دیگر نمی‌توانیم برای کنشگر a جهان‌ها یا حالت‌هایی که می‌داند غیر ممکن است را در نظر نگیریم و حذف کنیم. چرا که اولاً این جهان‌ها ممکن است برای کنشگر دیگر b ممکن به نظر بیاید و علاوه بر این، این جهان‌ها در مورد باور و یا دانش کنشگر a به باور و یا دانش کنشگر b مربوط باشد. بنابراین در این حالت نمی‌توانیم به سادگی حالت یک کنشگره رفتار کنیم. در اینجا از همان معناشناسی که توسط مدل‌های کریپکی برای

دانش بیان شده است یعنی رابطه‌ی تمایزناپذیری شناختی $\sim_a$ برای کنشگر a استفاده می‌کنیم. علاوه بر این رابطه، رابطه‌ی توجیه‌پذیری $\leq_a$ را نیز اضافه می‌کنیم. پس قاب شناختی توجیه‌پذیر ما به صورت $(S, \sim_a, \leq_a)$ است. به همان شکل که در حالت یک کنشگره دیدیم رابطه‌ی $\sim_a$ را بر اساس رابطه‌ی $\leq_a$ می‌توانیم تعریف کنیم. پس نهایتاً قاب توجیه‌پذیر چند کنشگره به شکل $(S, \leq_a)$ است. همچنین قبل از تعریف دقیق و رسمی مدل‌ها توجه کنید که لزومی ندارد رابطه‌ی توجیه‌پذیر $\leq_a$ همبند (یا حتی بیشتر خوش‌ترتیب) باشد چرا که فرض کنید دو جهان s و t تمایزپذیر $s \nsim t$ هستند، کنشگر a آنها را به طور همزمان ممکن در نظر نمی گیرد. اگر به کنشگر اطلاع داده شود که جهان ممکن s یا t است کنشگر سریعاً تشخیص خواهد داد که جهان واقع کدام است. اگر جهان واقع s باشد به راحتی می‌تواند آن را از t تشخیص دهد و متوجه خواهد شد که جهان واقع s است. اگر جهان واقع t باشد به همین صورت عمل خواهد کرد. در واقع باورهای او هیچ نقشی در این مورد بازی نخواهند کرد. بنابرین صحبت کردن از اینکه کدام حالت توجیه‌پذیرتر خواهد بود بی‌معنی است. بنابراین جهان‌های واقع در یک رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim_a$، می‌توانند و بایستی رابطه‌ی $\leq_a$ مقایسه پذیر باشند. بدین معنا که $s \leq_a t$ نتیجه می‌دهد که $s \sim_a t$ و تحدید $\leq_a$ روی هر کدام از کلاس های هم‌ارزی $\sim_a$ همبند است. همچنین بحث مشابهی در مورد باورهای شرطی می‌توانیم داشته باشیم با این تفاوت که تحدید $\leq_a$ روی هر کدام از کلاس‌های هم‌ارزی $\sim_a$ بایستی خوش‌ترتیب باشد.

تعریف ۵.۲ (قاب‌های شناختی توجیه‌پذیر). فرض کنید که $\mathcal{A}$ یک مجموعه‌ی متناهی از اندیس‌ها است که آنها را کنشگرها می‌نامیم. یک قاب شناختی توجیه‌پذیر به روی $\mathcal{A}$ (به اختصار EPF می‌نامیم.) ساختار $\mathbf{S} = (S, \sim_a, \leq_a)_{a\in\mathcal{A}}$ شامل یک مجموعه از حالت‌ها یا جهان‌های ممکن S به همراه یک رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim_a$ به نام رابطه‌ی تمایزناپدیری شناختی و یک خانواده از رابطه‌های توجیه‌پذیر $\leq_a$ که توسط کنشگرها اندیس گذاری شده‌اند است و این رابطه‌ها در دو شرط زیر صدق می‌کنند.

(۱) حالت‌های $\leq_a$-مقایسه‌پذیر حالت‌های $\sim_a$-تمایزناپذیرند (به این معنا که $s \leq_a t$ نتیجه می‌دهد $s \sim_a t$).

(۲) تحدید هر کدام از رابطه‌های توجیه‌پذیر روی هر $\sim_a$-کلاس هم‌ارزی رابطه‌ای خوش‌ترتیب است.

همانند آنچه که در حالت یک کنشگره داشتیم $Min_{\leq_a}P$، $<_a$ و $\cong_a$ را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۶.۲ (مدل‌های توجیه‌پذیر شناختی). مدل‌های توجیه‌پذیر شناختی را که آنها را به اختصار با EPM نشان می‌دهیم در واقع یک EPF چند کنشگره به همراه یک ارزیاب هستند (به همان صورت که مدل‌های توجیه‌پذیر تک کنشگره را تعریف کردیم.). به راحتی دیده می‌شود که EPF شامل اطلاعات اضافی است. رابطه‌ی $\sim_a$ از رابطه‌ی توجیه‌پذیر $\leq_a$ به طریق زیر بدست می آید.

$s \sim_a t$ اگر و تنها اگر $t \leq_a s$ یا $s \leq_a t$.

به عبارت دیگر دو جهان تمایزناپذیرند اگر و تنها اگر آنها مقایسه‌پذیر باشند (نسبت به $\leq_a$). بنابراین در حقیقت می‌توان قاب‌های شناختی توجیه‌پذیر را در قالب قاب‌های توجیه‌پذیر چند کنشگره بیان کرد.

تعریف ۷.۲ (رابطه‌ی خوش‌ترتیب موضعی). یک کلاس مقایسه‌پذیر یک مجموعه شامل اعضایی مانند t است که $s \leq t$ یا $t \leq s$ برای یک حالت s است. رابطه‌ی $\leq$ خوش‌ترتیب موضعی نامیده می‌شود اگر آن رابطه‌ی مرتبی باشد که تحدید آن روی هر کلاس مقایسه‌پذیر خوش‌ترتیب باشد. یک رابطه به طور موضعی همبند مرتب است اگر تحدید آن روی هر کلاس مقایسه‌پذیر همبند باشد. در حقیقت هر رابطه‌ی خوش خوش‌ترتیب یک رابطه‌ی همبند خوش‌ترتیب است بطوریکه هر زیر مجموعه‌ی آن دارای عضو مینیمال است.

تعریف ۸.۲ (قاب‌های با چندین کنشگر توجیه‌پذیر). یک قاب چند کنشگره‌ی توجیه‌پذیر (به اختصار MPF) یک ساختار به صورت $(S, \leq_a)_{a \in A}$، شامل یک مجموعه‌ی S از حالت‌ها به همراه یک خانواده از رابطه‌های خوش‌ترتیب موضعی $\leq_a$ است.

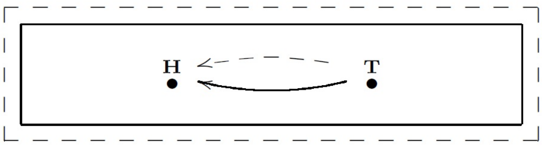
تناظر دوگانه بین قاب‌های EPF و قاب‌های MPF هر MPF متناظر می‌شود با یک EPF که در آن رابطه‌ی تمایزناپذیری به صورت ($\sim_a = \leq_a \cup \geq_a$) تعریف می‌شود. برعکس هر EPF توسط تناظری که رابطه‌ی تمایز ناپذیری را فراموش می‌کند به یک MPF متناظر می‌شود. به‌راحتی دیده می‌شود که این دو تناظر عکس یکدیگر هستند. از این به بعد هر دو کلاس از قاب‌های EPF و MPF را یکی در نظر می‌گیریم و مدل‌های هر دو را مدل توجیه‌پذیر می‌نامیم. همچنین به طور مشابه قاب‌های EPF از دانش و باور (شرطی) می‌توانیم در قاب‌های MPF صحبت کنیم.

تعریف ۹.۲ (سلول اطلاعات). رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim_a$ یک افراز روی مجموعه حالات S تعریف می‌کند که آن را افراز اطلاعات کنشگر a می‌نامیم. سلول اطلاعات s در افراز a (کلاس s در هم‌ارزی $\sim_a$) را با $s(a)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$s(a) = \{t \in S : s \sim_a t\}.$$

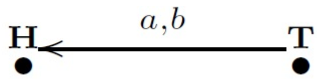
سلول اطلاعات $s(a)$ مشخص کننده‌ی دانشی است که کنشگر a در جهان ممکن s کسب کرده است. زمانی که جهان واقع s است کنشگر a تنها چیزی که می‌داند کلاس هم‌ارزی $s(a)$ از جهان‌های ممکن است.

مثال ۲. آلیس (a) و باب (b) مشغول انجام یک بازی هستند. این بازی به این شکل است که یک نفر (یک نفر سوم (داور) به غیر از باب و آلیس) یک سکه را روی میز قرار می‌دهد و روی آن را می‌پوشاند (به طوری که آلیس و باب نمی‌توانند سکه را ببینند)، برنده کسی است که درست حدس بزند که سکه به چه شکلی روی میز قرار گرفته است. یعنی وجهی از سکه که ناظر می‌بیند روی سکه (H) یا پشت سکه (T) است؟ داور سکه را از رو (H) روی میز قرار می‌دهد (یعنی وجهی از سکه که ناظر می بیند روی سکه(H) است.). آلیس و باب بر اساس تجر به‌ی قبلی‌شان (به صورت یک دانش همگانی) باور دارند که سکه از رو (H) روی میز قرار دارد (به این معنا که آنها متوجه می‌شوند که فرد سوم ترجیح می‌دهد که سکه را از رو قرار دهد.). در حقیقت نیز آنها درست حدس زدند، سکه از رو روی میز قرار گرفته است. بدون در نظر گرفتن داور مدل EPM برای این مثال به قرار زیر است.

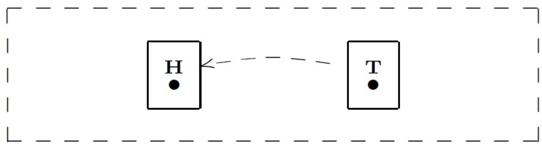


در این شکل پیکان‌ها عکس رابطه‌ی توجیه‌پذیری $\leq$ را بین حالت‌های مجزا نشان می‌دهند (از حالت با توجیه‌پذیری کمتر به سمت حالت با توجیه‌پذیری بیشتر). چون این رابطه‌ها بازتابی هستند برای راحتی کار از نشان دادن حلقه‌ها اجتناب کرده‌ایم. چهارگوش‌ها سلول اطلاعات را برای کنشگرها نمایش می‌دهند، در واقع به جای استفاده از اندیس از پیکان و چهار گوش خط‌چین برای آلیس و از پیکان و چهار گوش ممتد برای باب استفاده کرده‌ایم. جهان واقع s در سمت چپ قرار گرفته است (H در آن برقرار است.). از این پس در مثال‌های دیگر از این مدل به عنوان

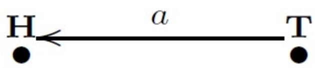
مدل **S** یاد خواهیم کرد. با کنار گذاشتن چهار گوش‌ها نمایش مدل MPM متناظر بدست می‌آید که آن را نیز **S** می‌نامیم (همچنین از اندیس به جای تکرر پیکان استفاده می‌کنیم.).



مثال ۳. در مقابل آلیس داور وجهی که روی میز قرار گرفته را به باب نشان می‌دهد اما آلیس نمی‌تواند وجه سکه را ببیند. مدل EPM این حالت که با **W** نمایش می‌دهیم به شکل زیر است.



همچنین مدل MPM آن به شکل زیر است.



تعریف ۱۰.۲ (نمود باور(شرطی) و رابطه‌ی دسترس‌پذیری برای باور (شرطی)). به همان شکلی که در حالت یک کنشگره رابطه‌ی دسترس‌پذیری شناختی و باور را تعریف کردیم در اینجا نیز می‌توانیم این کار را انجام دهیم، تنها با این تفاوت که برای هر s می‌بایستی حالاتی که بیشترین توجیه‌پذیری را دارند در $s(a)$ به جای S، انتخاب کنیم. به همین دلیل نماد جدیدی را به عنوان نمود باور در نقطه‌ی s برای کنشگر a به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$s_a := Min_{\leq_a} s(a).$$

s_a در واقع مجموعه حالاتی است که بیشترین توجیه‌پذیری را دارند و با دانش کنشگر در نقطه‌ی s سازگار هستند. نمود باور s راه‌هایی هستند که حالت یا جهان ممکن s برای یک کنشگر پدیدار می‌شود یا (با توجه به زبان نظریه‌ی تغییر باور) تئوری در حال حاضر کنشگر در باره‌ی جهان s را مشخص می‌کند. می‌توانیم این پدیدار را گسترش دهیم و باورهای شرطی (به طور کلی) را نیز بدین طریق بیان کنیم. برای باورهای شرطی به هر S- گزاره‌ی $P \subseteq S$ و هر حالت $s \in S$، نمود باور شرطی s_a^p حالت s برای کنشگر a، با اطلاعات داده شده P را نسبت می‌دهیم. این نمود را می‌توانیم به صورت S- گزاره زیر تعریف کنیم.

$$s_a^P := Min_{\leq_a} s(a) \cap P.$$

این مجموعه شامل حالاتی است که بیشترین توجیه‌پذیری را دارند و با دانش فرد در حالت s سازگاری دارند. نمود شرطی s_a^P بیانگر تئوری تجدید نظر شده‌ی کنشگر a (پس از یادگیریP) در باره‌ی جهان s است. می‌توانیم این نمودها را در قالب‌های رابطه‌ای بیان کنیم. رابطه‌های دسترس پذیری $\rightarrow_a$ و $\rightarrow_a^P$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$s \rightarrow_a t$ اگر و تنها اگر $t \in s_a$.

$s \rightarrow_a^P t$ اگر و تنها اگر $t \in s_a^P$.

تعریف ۱۱.۲ (دانش و باور (شرطی)). عملگر دانش و باور (شرطی) برای کنشگر a را می‌توانیم همانند عملگرهای وجهی برای رابطه‌ی دسترس‌پذیری شناختی و باور (شرطی) a تعریف کنیم.

$$K_a P := [\sim_a] P = \{s \in S : s(a) \subseteq P\}.$$

$$B_a P := [\rightarrow_a] P = \{s \in S : s_a \subseteq P\}.$$

$$B_a^Q P := [\rightarrow_a^Q] P = \left\{s : s_a^Q \subseteq P\right\}.$$

همچنین نمادی برای دوگان عملگر K (امکان شناختی) معرفی می‌کنیم.

$$\hat{K}_a^P := \neg K_a \neg P.$$

تعریف ۱۲.۲ (گزاره‌های باور). مفهومی که برای گزاره‌ها تعریف کرده‌ایم تا به حالا به صورت موضعی بوده است. S-گزاره‌ها را برای هر مدل S معرفی کردیم. اگر مدل ثابت باشد این مفهوم برای تعبیر جمله‌های یک مدل داده شده کفایت می‌کند. اما زمانی که در مورد تغییر مدل‌ها صحبت می‌کنیم (هنگامی که در مورد تغییر باور پویا صحبت می‌کنیم.)، ما نیاز به یک مفهوم از گزاره‌ها داریم که به یک مدل خاص وابسته نباشد، بلکه برای هر مدلی قابل تعبیر باشد. یک گزاره‌ی باور[۸] یک تابع $\mathbf{P}$ است که به هر مدل توجیه‌پذیر $\mathbf{S}$ یک S-گزاره‌ی $\mathbf{P_S} \subseteq S$

[۸] Doxastic proposition

را نسبت می‌دهد.

می‌نویسم $s \vDash_{\mathbf{S}} \mathbf{P}$ و می‌گوییم $\mathbf{P}$ در $s \in \mathbf{S}$ درست است هرگاه داشته باشیم:

$$s \vDash_{\mathbf{S}} \mathbf{P} \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad s \in (\mathbf{P})_{\mathbf{S}}.$$

هنگامی که مدل مشخص است با اختصار $s \vDash \mathbf{P}$ درستی P را نشان می‌دهیم. در ضمن تمام گزاره‌های باور را با Prop نشان می‌دهیم. تمام عملگرهای بولی روی S-گزاره‌ها را می‌توانیم به صورت نقطه به نقطه برای عملگرهای Prop تعمیم دهیم. گزاره های "همیشه درست" $\top$ و "همیشه غلط" $\bot$ به صورت $(\bot)_{\mathbf{S}} := \varnothing$ و $(\top)_{\mathbf{S}} := S$، نقیض به صورت $(\neg \mathbf{P})_{\mathbf{S}} := S \setminus \mathbf{P}_{\mathbf{S}}$، عطف $(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})_{\mathbf{S}} := \mathbf{P}_{\mathbf{S}} \cap \mathbf{Q}_{\mathbf{S}}$ و فصل به‌صورت $(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})_{\mathbf{S}} := \mathbf{P}_{\mathbf{S}} \cup \mathbf{Q}_{\mathbf{S}}$ تعریف می‌شوند. سایر عملگرهای بولی شامل عطف‌ها و وصل‌های نامتناهی به همین شکل قابل تعریف هستند. به طور مشابه، به طور نقطه به نقطه عملگرهای شناختی و باور (شرطی) به صورت $(K_a \mathbf{P})_{\mathbf{S}} := K_a \mathbf{P}_{\mathbf{S}}$، $(B_a \mathbf{P})_{\mathbf{S}} := B_a \mathbf{P}_{\mathbf{S}}$، $(B_a^Q \mathbf{P})_{\mathbf{S}} := B_a^{Q_{\mathbf{S}}} \mathbf{P}_{\mathbf{S}}$ تعریف می‌شوند. همچنین به راحتی بدست می‌آید که $B_a \mathbf{P} := B_a^{\top} \mathbf{P}$. در آخر رابطه‌ی استلزام $\mathbf{P} \vDash \mathbf{Q}$ بین گزاره‌های باور به صورت نقطه به نقطه بدین صورت تعریف می‌شود که $\mathbf{P} \vDash \mathbf{Q}$ اگر و تنها اگر برای تمام مدل‌های $\mathbf{S}$ داشته باشیم $\mathbf{P}_{\mathbf{S}} \subseteq \mathbf{Q}_{\mathbf{S}}$.

۳.۳.۲ ارتباط بین مدل‌های توجیه‌پذیر و مدل‌های باور شرطی

هر مدل توجیه‌پذیر شناختی از طریق توسعه‌ی کانونی به یک CDM -مدل تبدیل می‌شود، قرار دهید $s_a^P := \mathrm{Min}_{\leq_a} \{t \in P : t \sim_a s\}$. که در آن $\mathrm{Min}_{\leq_a} = \{t \in T : t \leq_a t' \quad \forall t' \in T\}$ مجموعه‌ی کوچکترین عناصر T است که ما آن را توسعه‌ی کانونی CDM از یک مدل توجیه‌پذیر می‌نامیم. برعکس این مورد در قضیه‌ی زیر نشان داده شده است.

قضیه ۱.۳.۲ (قضیه‌ی نمایش). *هر CDM به طور کانونی از یک مدل توجیه‌پذیر شناختی بدست می‌آید.*

اثبات. فرض کنید CDM -مدل $(S, \{\xrightarrow{P}_a\}_{a \in \mathcal{A}, P \subseteq S})$ مفروض باشد. برای هر a یک رابطه‌ی دلخواه خوش‌ترتیب $\leq^a$ برای خانواده‌ی $\{s(a) : s \in S\}$ شامل تمام نمایش‌های شناختی در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم.

$s \sim_a t$ اگر و تنها اگر $s(a) = t(a)$.

همچنین تعریف می‌کنیم:

$s \leq_a t$ اگر $s(a) \leq^a t(a)$ یا $s(a) = t(a), s \in t_a{}^{\{s,t\}}$.

به‌راحتی می‌شود بررسی کرد که این مدل یک مدل شناختی توجیه‌پذیر است که مدل کانونی CDM آن خود **S** است. ∎

همانطور که اثبات بالا نشان می‌دهد هر CDM به طور کانونی به مدل‌های توجیه‌پذیر متفاوتی نظیر می‌شود. از آنجا که ما می‌خواهیم منطق باورهای شرطی را مورد مطالعه قرار دهیم ساختارهای باور شرطی را اصل قرار می‌دهیم.

۴.۳.۲ باور متقن و لغوپذیری تئوری دانش

پس از اینکه گتیه با مقاله‌ی خود تعریف افلاطون از دانش به عنوان " باور صادق موجه" را زیر سؤال برد. فیلسوفان سعی کردند تا با تکمیل تعریف افلاطون مشکلات گتیه را برطرف کنند. هینتیکا این تعریف را سعی کرد با مفهوم "استحکام[۹]"[۳۲]؛ کلین، لهر، پاکسون و استلنیکر[۱۰] [۳۸، ۴۰، ۴۱، ۵۶] با مفهوم "غیرقابل لغو بودن[۱۱]" و روت[۱۲] [۵۲] تحت عنوان "پایداری[۱۳]" تکمیل کنند. مطابق با نظریه‌ی لغوپذیری دانش (یا پایداری توسط روت) یک باور به عنوان یک "دانش" در نظر گرفته می‌شود، اگر آن تحت هر تغییر باوری در اثر هر مدرک جدیدی پایدار باقی بماند. در واقع اگر کنشگری در مورد چیزی دانش دارد توجیه او در برابر هر مدرک جدیدی که تا به حال در معرض آن قرار نگرفته است پایدار باقی بماند. یکی از مسائلی که در این زمینه به‌وجود می آید این است که منظور ما از مدرک چیست. ما در اینجا دو تعبیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نخستین تعبیر که رایج‌ترین تعبیر نیز می‌باشد این است که مدرک را به عنوان "هر اطلاعات جدیدی" در نظر بگیریم. این مفهوم توسط استلنیکر [۵۶]

---

[۹] Robustness

[۱۰] Klein, Lehrer,Paxson, Stalnaker

[۱۱] indefeasibility

[۱۲] Rott

[۱۳] Stability

صورت‌بندی شده است بدین قرار که "یک کنشگر می داند φ را اگر φ درست باشد، او باور کند φ را و براعتقادش بر φ تحت هر اطلاعات جدیدی باقی بماند". این صورت‌بندی با صورت‌بندی رایج از دانش (دانش آیومن) در علوم کامپیوتر و اقتصاد متفاوت است، چرا که این صورت‌بندی جدید در مدل $S5$ برقرار نیست (شرط درونیابی منفی برقرار نیست.). استلنیکر نشان داد سیستم وجهی این عملگر وجهی که کامل می‌باشد $S.4.3$ است که آن را " دانش متقن" می‌نامیم. اما تعبیر طبیعی دیگر "مدرک" را به عنوان "هر گزاره‌ای" در نظر می‌گیرد که در واقع شامل اطلاعات غلط نیز است. "دانش واقعی" می‌بایست تحت هر مدرک غلطی پایدار بماند [۵۲]. همانطور که نشان خواهیم داد این مفهوم متناظر است با عمل گر وجهی ما از "دانش"، KP که می‌توانیم آن را "باور غیر قابل تجدیدپذیر" بنامیم. در واقع این صورت‌بندی همان مفهومی از دانش است که بر پایه‌ی افراز است و در تمام اصول $S5$ صدق می‌کند. درواقع این دومین تعبیر تعریف جامع و زیبایی از $S5$ و درون‌نگری منفی است. در این بخش توجهی به اینکه کدام مفهوم بر دیگری رجحان دارد نداریم. ما هر دو مفهوم را صورت‌بندی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که باور شرطی را زمانی می‌توانیم به عنوان دانش معرفی کنیم که از هردوی این تعابیر استفاده کنیم.

دانش همچون باور تغییرناپذیر برای تمام گزاره‌های $\mathbf{P}$، عطف روی تمام گزاره باورها را داریم:

$$K_a\mathbf{Q} = \bigwedge_{\mathbf{P}} B_a^{\mathbf{P}}\mathbf{Q}.$$

یا به عبارت دیگر برای هر حالت s از هر مدل $\mathbf{S}$ داریم:

$s \models K_a\mathbf{Q}$ اگر و تنها اگر برای هر $\mathbf{P}$ $\quad s \models B_a^{\mathbf{P}}\mathbf{Q}$.

بنابراین می‌توانیم توصیف کاملی از دانش به عنوان باوری که تحت هر تغییر باوری پایا می‌ماند داشته باشیم. یک باور "دانش" است اگر و تنها اگر آن نتواند تغییر کند. در واقع تحت هر شرطی به آن باور داشته باشیم. این تعبیر همان صورت‌بندی تعبیر دوم از دانش است. این تعریف "دانش" از آن که استلنیکر معرفی کرد پایدارتر است. این یک مفهوم قوی از دانش است که درون‌نگری کامل(مثبت و منفی) برای آن برقرار است. هچنین به راحتی می‌توان رابطه‌ی زیر را بررسی کرد.

$$K_a\mathbf{Q} = B_a^{\neg\mathbf{Q}}\mathbf{Q} = B_a^{\neg\mathbf{Q}}\bot.$$

بیان بالا راهی دیگر برای مشخص کردن دانش با تعبیر غیر قابل تجدیدپذیر بودن را معرفی می‌کند. موضوعی دانسته می‌شود اگر باور شود حتی اگر باور ما مشروط به نقیض آن موضوع باشد. به عبارت دیگر این عبارت بیان می‌کند نقیض موضوع را (به عنوان یک مدرک) نمی‌توان پذیرفت (چرا که منجر به یک باور ناسازگار می‌شود.).

تعریف ۱۳.۲ (باور متقن). برای صورت‌بندی دانش با تعبیر اول (استلنیکر) عملگر وجهی $\Box_a$ را که از معکوس رابطه‌ی توجیه‌پذیری $\geqslant_a$ بدست می‌آید معرفی می‌کنیم. برای هر S-گزاره‌ی $P \subseteq S$ از هر مدل داده شده‌ی $\mathbf{S}$ قرار می‌دهیم:

$$\Box_a P := [\geq_a] P = \{s \in S : t \in P \quad \forall t \leq_a s\}.$$

و به همین طریق می‌توان عملگر $\Box_a P$ را به صورت نقطه به نقطه روی گزاره‌های باور تعریف کرد. $s \models \Box_a \mathbf{P}$ خوانده می‌شود، در حالت s باور کنشگر a به $\mathbf{P}$ متقن است؛ یا در حالت s، کنشگر a، $\mathbf{P}$ را بشکل متقن باور کرده است. عملگر $\Box_a$ عملگر وجهی $\mathbf{S}4$ است پس $\geqslant_a$ بازتابی و متعدی است. اما لزوماً $\mathbf{S}5$ نیست. باور متقن درست است. ($\Box_a \mathbf{P} \models \mathbf{P}$). و دارای درون‌نگری مثبت است ($\Box_a \mathbf{P} \models \Box_a \Box_a \mathbf{P}$). اما لزوما دارای درون‌نگری منفی نیست. یعنی به طور کلی $\neg \Box_a \mathbf{P} \models \Box_a \neg \Box_a \mathbf{P}$. برقرار نیست.

رابطه‌ی بین دانش، باور متقن و باور شرطی نخست می‌بینیم دانش باور متقن را به دست می‌دهد.

$$K_a \mathbf{P} \models \Box_a \mathbf{P}.$$

همچنین باور متقن باور را بدست می‌دهد.

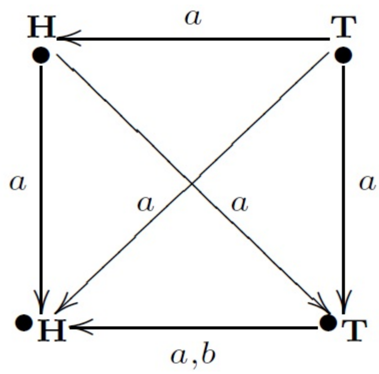
$$\Box_a \mathbf{P} \models B_a \mathbf{P}.$$

مشابه قبل می‌توانیم دانش را به عنوان باوری که تحت هر تغییری پایا است معرفی کنیم. در واقع باور متقن باوری است که تحت هر تغییری در اثر اطلاعات درست پایا است. صورت‌بندی آن از این قرار است که برای هر حالت s از هر مدل $\mathbf{S}$ عبارت زیر را داریم.

$s \models \Box_a \mathbf{Q}$ اگر و تنها اگر برای تمام $\mathbf{P}$ هایی که $s \models \mathbf{P}$ داشته باشیم $s \models B_a^{\mathbf{P}} \mathbf{Q}$.

همانطور که مشاهده می‌کنید مفهوم باور متقن با مفهومی که استلنیکر از دانش معرفی کرد یکی است (هر اطلاع درستی به عنوان مدرک در نظر گرفته می‌شود.). ما در این نوشتار منظورمان از دانش همان مفهوم قوی دانش است و منظورمان از باور متقن همان دانشی است که استلنیکر صورت‌بندی کرده است.

مثال ۴. حالت اولیه ی مثال ۲ را در نظر بگیرید. (باب و آلیس هنوز سکه را ندیده‌اند.) آلیس مجبور می‌شود که برای دقایقی از اطاق خارج شود و این فرصت خوبی برای باب به‌وجود می‌آورد که پوشش سکه را بردارد و نگاهی به سکه بیندازد. باب این کار را انجام داد و متوجه شد که سکه از رو قرار گرفته است. زمانی که آلیس بازگشت نمی داند که آیا باب سکه را دیده است یا نه. نگاه کردن به سکه خلاف قوانین بازی است و باتوجه به صداقت باب، آلیس باور می‌کند که او به سکه نگاه نکرده است. مدل در این حالت پیچیده تر می‌شود. در اینجا تنها MPM را نمایش می‌دهیم.



این مدل را $\mathbf{S}'$ می‌نامیم. جهان واقع s'_1 است و در گوشه‌ی سمت چپ بالا قرار گرفته است که در آن باب به سکه نگاه کرده است و سکه از رو قرار گرفته است. t'_1 در سمت راست بیانگر حالتی است که باب به سکه نگاه کرده است و دیده است که سکه از پشت قرار گرفته است. در دو گره‌ی پایینی s'_2 و t'_2 باب به سکه نگاه نکرده است. این مدل این فرض طبیعی را نشان می‌دهد که آلیس باور قبلی خودش مبنی بر اینکه سکه از رو قرار گرفته است را حفظ کرده است (چرا که هیچ دلیلی برای تغییر آن وجود ندارد.). علاوه‌بر این ما فرض می‌کنیم که او این باور را حتی اگر کسی به او بگوید باب به سکه نگاه کرده است را حفظ خواهد کرد. (این را توسط یک پیکان با اندیس a از t'_1 به s'_1 نشان داده‌ایم.) چرا که این طبیعی به نظر می‌رسد که حتی اگر باب به سکه نگاه کرده باشد این به باور آلیس درمورد پشت یا رو بودن سکه تأثیری نمی‌گذارد.

در هر دو مثال ۲ و ۴ آلیس (در جهان واقع) باور درستی داشت. سکه از رو قرار گرفته است. بدین معنی که جهان واقع $B_a\mathbf{H}$ را ارضاء می‌کند. اما در هر دو مدل این باور درست دانش نیست (چرا که آلیس نمی داند سکه از رو واقع شده است.). با این وجود در مثال ۲ این باور متقن است (اگر چه آلیس نداند که این باور متقن است.)، هیچ اطلاعات اضافی در مورد جهان واقع نمی‌تواند او را مجبور کند که باورش را تغییر دهد. (در واقع هر اطلاعات جدیدی که باعث می‌شود که آلیس متوجه جهان واقع شود، می‌فهمد سکه از رو قرار گرفته است.) بنابراین در مدل $\mathbf{S}$ در مثال ۲ داریم $s \vDash \Box_a\mathbf{H}$ (s جهان واقع می‌باشد.) .اما در مثال ۳ باور آلیس (سکه از رو قرار گرفته است.) اگر چه درست است اما متقن نیست. در واقع اطلاعات اندکی وجود دارد که اگر آلیس آنها را یاد بگیرد باورش را تغییر خواهد داد. می‌توانیم این اطلاعات را در قالب گزاره‌ی باور $\mathbf{H} \to K_{\mathbf{b}}\mathbf{H}$ بیان کرد. به راحتی می‌توان نشان داد که جهان واقع s' از مدل $\mathbf{S}'$ گزاره‌ی $\mathbf{B}_a^{\mathbf{H}\to\mathbf{K_bH}}$ را ارضاء می‌کند. (چون $(\mathbf{H} \to \mathbf{K_b}\mathbf{H})_{\mathbf{S}'} = \{s'_1, t'_1, t'_2\}$ و عضو مینیمم مجموعه‌ی $\{s'_1, t'_1, t'_2\} = \{s'_1, t'_1, t'_2\} \cap s'_1(a)$، t'_2 است که $\mathbf{T}$ را ارضاء می‌کند. بنابراین اگر این اطلاعات به آلیس داده شود او به اشتباه باور خواهد کرد که سکه از پشت ($\mathbf{T}$) قرار گرفته است. این یک مثال از حقایق خطرناک است. اطلاعات درستی که یادگیری آنها موجب باور های غلط می‌شود.

نکته. می‌توان مشاهده کرد که باور یک کنشگر می‌تواند متقن باشد بدون اینکه خود کنشگر این موضوع را بداند (دانستن به مفهوم قوی K). متقن بودن (به طور مشابه "درستی") یک خاصیت عارضی (خارجی) برای باور یک کنشگر است که تنها با مقایسه سیستم تغییر باور کنشگر با واقعیت مشخص می‌شود. در واقع تنها راه برای اینکه کنشگر بداند یک باور متقن است، این است که بداند این باور درست است. یک دانش واقعی (باور کافی نیست.) از حقیقیت آن داشته باشد. به شکل زیر می‌توان این مفهوم همانی را بیان کرد.

$$K_a \Box_a \mathbf{P} = K_a\mathbf{P}.$$

به بیان دیگر دانستن این که باور به موضوعی متقن است همانند این است که بدانیم آن موضوع درست است. در حقیقت تمام باورها در نظر خودشان متقن به نظر می‌رسند. در واقع با باور کردن موضوعی کنشگر می‌بایست باور کند که این باور متقن است.

$$B_a \Box_a \mathbf{P} = B_a\mathbf{P}.$$

بر این اساس می‌توان گفت، باور کردن اینکه موضوعی باور متقن است همانند این است که آن موضوع را باور کنیم. عبارت بالا را با این همانی که در مورد دانش (در منطق باور شناختی) موجود است مقایسه کنید.

$$B_aK_a\mathbf{P} = B_a\mathbf{P}.$$

باور به این که چیزی دانسته می‌شود مثل این است که آن موضوع را بدانیم.

بیان باور (شرطی) با استفاده از تعابیر مختلف دانش می‌توانیم باور (شرطی) را با استفاده از دوتعبیری که از دانش بیان کردیم، (K و $\Box$) معرفی کنیم. برای باور داریم.

$$B_a\mathbf{P} = \hat{K}_a \Box_a \mathbf{P} = \Diamond_a \Box_a \mathbf{P}.$$

جایگزین کنید $\hat{K}_a\mathbf{P} = \neg K_a \neg \mathbf{P}$ که در آن عملگر لوزی K_a می‌باشد. همچنین $\Diamond_a\mathbf{P} = \neg \Box_a \neg \mathbf{P}$ عملگر لوزی $\Box_a$ است.

رابطه‌ی $B_a\mathbf{P} = \Diamond_a \Box_a \mathbf{P}$ توسط استلنیکر [۵۶] مشاهده شده است. او از این رابطه برای تحلیل فلسفی خویش از "باور" تحت عناون "دانش لغو پذیر" (دانش متقن) استفاده کرده است. اما این تحلیل را برای باورهای شرطی به کار نبرده است .در حالی که به راحتی می‌توان همانی $B_a\mathbf{P} = \hat{K}_a \Box_a \mathbf{P}$ را گسترش داد و باور شرطی را با استفاده از هر دو تعبیر دانش بیان کرد.

$$B_a^{\mathbf{P}}\mathbf{Q} = \hat{K}_a \Box_a \mathbf{P} \to \hat{K}_a \Box_a \left(\mathbf{P} \wedge \Box_a (\mathbf{P} \to \mathbf{Q})\right).$$

۵.۳.۲ عملگرهای وجهی و تعابیر دیگر برای باور

از منظر منطق وجهی طبیعی به نظر می‌رسد که عملگرهای وجهی $[>_a]$ و $[\cong_a]$ برای رابطه‌های دیگر (توجیه‌پذیری مستقیم و توجیه‌پذیری برابر) را نیز تعریف کنیم. برای S- گزاره‌های $P \subseteq S$ روی یک مدل داده شده‌ی $\mathbf{S}$ می‌توانیم عملگرها را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$[>_a]P = \{s \in S : t \in P \quad \forall t >_a s\}.$$

$$[\cong_a]P = \{s \in S : t \in P \quad \forall t \cong_a s\}.$$

همانند قبل می‌توانیم این عملگرها را به عملگرهایی به روی Prop گسترش دهیم. شهودمان نسبت به این عملگرها واضح نیست اما استفاده از این عملگرها در عملگرهای وجهی دیگر تعابیر مختلفی برا ی باور مشخص می‌کند که مثمر ثمر می‌باشد.

تعریف ۱۴.۲ (باور متقن ضعیف). می‌توانیم عملگر باور متقن ضعیف $\Box^{weak}\mathbf{P}$ را با استفاده از رابطه‌ی مستقیم به شکل زیر تعریف کنیم.

$$\Box_a^{weak}\mathbf{P} = \mathbf{P} \wedge [>_a]\mathbf{P}.$$

با توجه به تعاریف به راحتی عبارت زیر بدست می‌آید.

$s \vDash \Box_a^{weak}\mathbf{P}$ اگر و تنها اگر $s \vDash \mathbf{P}$ و برای تمام $t < s$ داشته باشیم $t \vDash \mathbf{P}$.

یک نحوه‌ی دیگر مشخص کردن باور متقن ضعیف به شکل زیر است.

$s \vDash \Box_a^{weak}\mathbf{P}$ اگر و تنها اگر برای هر$\mathbf{P}$، $s \vDash \mathbf{P}$ داشته باشیم $s \vDash \neg B_a^{\mathbf{P}}\neg\mathbf{Q}$.

بنابراین "باورهای متقن ضعیف" باورهایی هستند که به باقی ماندن آنها مطمئن هستیم، به عبارتی دیگر کسب اطلاعات جدید ما را مجبور به تغییر آنها نخواهد کرد.

تعریف ۱۵.۲ (عملگر تغییر یگانی[۱۴]). با استفاده از عملگر وجهی مستقیم می‌توانیم عملگر وجهی یگانی "تغییر باور" $*_a$ را تعریف کنیم. این عملگر به طور شهودی عملگر تغییر باور (دوتایی) استاندارد را درونی می‌کند.

$$*_a\mathbf{P} = \mathbf{P} \wedge [>_a]\neg\mathbf{P}.$$

این تعریف رابطه‌ی زیر را بدست می‌دهد.

[۱۴] The unary revision operator

$s \models *_a\mathbf{P}$ اگر و تنها اگر $s \in s_a^P$.

$*_a\mathbf{P}$ به این گونه عمل می‌کند که از هر سلول اطلاعات $s(a)$ حالاتی را انتخاب می‌کند که تئوری تغییر کرده s_a^P را ارضاء کند.

$$*_a\mathbf{P} \cap s(a) = s_a^P.$$

این عبارت تعبیر ما را به خوبی توضیح می‌دهد، گزاره‌ی $*_a\mathbf{P}$ یک توصیف کامل از تئوری درباره‌ی حالت حاضر که توسط کنشگر بعد از دریافت $\mathbf{P}$ بازنگری شده است. رابطه‌ی این همانی جالب دیگر به شکل زیر است.

$$B_a^{\mathbf{P}}\mathbf{Q} = K_a(*_a\mathbf{P} \to \mathbf{Q}).$$

به عبارت دیگر، $\mathbf{Q}$ یک باور شرطی (تحت شرط $\mathbf{P}$) اگر و تنها اگر آن به‌عنوان یک نتیجه‌ی تغییر تئوری کنشگر شناخته شود (پس از تغییر با $\mathbf{P}$).

تعریف ۱۶.۲ (باور قوی). به کمک دانش و باور متقن یک تعبیر مهم دیگر تحت عنوان باور قوی[۱۵] می‌توانیم تعریف کنیم.

$$Sb_a\mathbf{P} = B_aP \wedge K_a(\mathbf{P} \to \Box_a\mathbf{P}).$$

با توجه به رابطه‌ی توجیه‌پذیری، باور قوی بدین معنی است که در سلول اطلاعات $s(a)$ تمام Pحالت‌های- زیر (موجه‌تر) تمام غیر Pحالت‌ها- هستند (علاوه بر این Pحالت‌ها- وجود دارند یعنی مجموعه حالت‌ها-P تهی نیستند.).

$s \models Sb_a\mathbf{Q}$ اگر و تنها اگر $s \models B_a\mathbf{Q}$ و برای هر P

اگر $s \models \neg K_a(\mathbf{P} \to \neg\mathbf{Q})$ آنگاه $s \models B_a^{\mathbf{P}}\mathbf{Q}$.

به عبارت دیگر موضوعی یک باور قوی است اگر و تنها اگر باور شود و تنها با مدرکی (درست یا نه) لغو شود که با آن در تناقض است.

---

[۱۵] Strong belief

۶.۳.۲ منطق باور شرطی

منطق CDL (منطق باور شرطی) که توسط بالتاگ و اسمت در [۶] معرفی شده است در واقع قوی‌ترین منطقی است که توسط بورد[۱۶] در [۱۷] معرفی شده است. نحو منطق CDL بدون عملگرهای دانش و باور همگانی را در ادامه بیان خواهیم کرد..

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid B_a^{\varphi}\varphi.$$

معناشناسی CDL توسط تابع تعبیری است که به هر جمله‌ی φ از CDL یک گزاره‌ی باور $\| \varphi \|$ را نسبت می‌دهد. در این منطق دانش و باور ساده (غیر شرطی) توسط عملگرهای اشتقاقی به صورت $K_a\varphi := B_a^{\neg\varphi}\varphi$، $B_a\varphi := B_a^{\top}\varphi$ ($\top := \neg(p \wedge \neg p)$ یک گزاره ی همانگو) تعریف می‌شوند.

سیستم برهان سیستم برهان CDL علاوه بر اصول و قواعد منطق گزاره‌ها شامل موارد زیر نیز است.

(ضرورت باور (ض.ب))	$\vdash \varphi \Longrightarrow \vdash B_a^{\psi}\varphi;$
(نرمال بودن(ن))	$\vdash B_a^{\theta}(\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow (B_a^{\theta}\varphi \longrightarrow B_a^{\theta}\psi);$
(درستی معرفت(د.م))	$\vdash K_a\varphi \longrightarrow \varphi;$
(پایداری معرفت(پ.م))	$\vdash K_a\varphi \longrightarrow B_a^{\psi}\varphi;$
(درون‌نگری کامل(د))	$\vdash B_a^{\psi}\varphi \longrightarrow K_a B_a^{\psi}\varphi;$
	$\vdash \neg B_a^{\psi}\varphi \longrightarrow K_a \neg B_a^{\psi}\varphi;$
(فرض مقبول بودن مفروضات(ف))	$\vdash B_a^{\varphi}\varphi;$
(مینیمال بودن تغییر(م.ت.۱))	$\vdash \neg B_a^{\varphi}\neg\psi \longrightarrow (B_a^{\varphi\wedge\psi}\theta \longleftrightarrow B_a^{\varphi}(\psi \longrightarrow \theta)).$

[۱۶] O.Board

قضیه ۲.۳.۲ (تمامیت و تصمیم‌پذیری). *سیستم بالا برای مدل‌های MPM و (همچنین مدل‌های EPM) تمام (به طور ضعیف) است. همچنین تصمیم‌پذیر و دارای خاصیت مدل متناهی است.*

اثبات. به ضمیمه رجوع کنید. ∎

۷.۳.۲ منطق دانش و باور متقن

مسئله‌ی یافتن یک مجموعه‌ی اصل‌بندی کامل برای منطق "لغو پذیری دانش" به همراه باور شرطی در [۱۷] مطرح شده بود. در اینجا با گسترش منطق CDL به منطق کامل $K\Box$ به این سوال پاسخ خواهد داده شد. همچنین مراتب بالاتر " دانش لغو پذیر"، با تعریف مرتبه اول ما از" باور متقن" متناظر می‌شود.

نحو و معناشناسی. نحو منطق $K\Box$ به شکل زیر است.

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Box_a\varphi \mid K_a\varphi.$$

با توجه به معناشناسی مدل‌های توجیه‌پذیر برای منطق CDL و متناظر کردن جملات با گزاره‌های باور می‌توان با توجه به تعاریف، باور و باور شرطی را نیز به عنوان مشتق تعریف کرد.

$$B_a^{\varphi}\psi := \hat{K}_a\varphi \to \hat{K}_a(\varphi \wedge \Box_a(\varphi \to \psi)).$$

$$B_a\varphi := B_a^{\top}\varphi.$$

$\hat{K}_a\varphi := \neg K_a\neg\varphi$ لوزی عملگر K است و $\top = \neg(p \wedge \neg p)$ یک همانگو است. بنابراین منطق $K\Box$ از CDL قویتر است.

سیستم اثبات. علاوه‌بر قواعد و اصول موضوعه‌ی منطق گزاره‌ها سیستم اثبات برای منطق $K\Box$ شامل موارد زیر است.

- قاعده‌ی ضرورت برای K_a و $\Box_a$؛
- اصول موضوعه‌ی $S5$ برای K_a؛
- اصول موضوعه‌ی $S4$برای $\Box_a$؛

• $K_a P \to \Box_a P$؛

• $K_a(P \vee \Box_a Q) \wedge K_a(Q \vee \Box_a P) \to K_a P \vee K_a Q$.

قضیه ۳.۳.۲ (تمامیت و تصمیم پذیری). *منطق $\Box_a$ برای مدل‌های MPM و (همچنین مدل‌های EPM) کامل (به طور ضعیف) است. همچنین تصمیم‌پذیر و دارای خاصیت مدل متناهی است.*

اثبات. مشابه قضیه ی ۲.۳.۲ است. ■

۴.۲ محک رمزی برای منطق باور شرطی

اگر شرطی "اگر P آنگاه Q" در محک رمزی را به صورت باور شرطی $B_a^P Q$، عملگر تغییر باور را به صورت عمگر $*_a$ روی KB -مدل (با توجه به هم‌ارزی تئوری‌های CDL و AGM روی KB) و "تئوری" T را به عنوان عناصر $\mathcal{T}_a$ در CDM در نظر بگیریم، محک رمزی را برای آن می‌توان به شکل زیر تعریف کرد.

برای هر $R \subseteq S$: $\quad s_a^p \subseteq B_a^P Q$ اگر و تنها اگر $s_a^R *_a P \subseteq Q$.

به راحتی قابل بررسی است که این محک در مورد این شرطی غلط است. اصول CDM را درنظر بگیرید. سمت راست محک بالا برابر است با $\forall t \in s_a^R : t_a^P \subseteq Q$. با توجه به اصول‌مان از $t \in s_a^P$ نتیجه می‌شود $t_a^P = s_a^P = s_a *_a P$. بنابراین هر گاه $s_a^R \neq \varnothing$ سمت راست محک رمزی برابر است با $s_a *_a P \subseteq Q$ که به اندازه کافی جامع برای برابری با سمت چپ $s_a^R *_a P \subseteq Q$ نیست. بنابراین می‌بینیم که محک رمزی تنها زمانی برقرار است که داشته باشیم $s_a = s_a^R$. بدین معنی که باورهای شرطی با باورهای غیر شرطی تلاقی کنند. این همان نتیجه‌ای بود که قبلاً در مورد نظریه‌ی تغییر باور بیان کردیم. در واقع محک رمزی بر اساس معناشناسی که بیان کردیم برای باور های غیر شرطی برقرار است.

برای $R = S$ $\quad s_a \subseteq B_a^P Q$ اگر و تنها اگر $s_a *_a P = s_a^P \subseteq Q$.

نکته‌ی قابل توجه در مورد محک رمزی این است که این محک فرض می‌کند باور های فرضی یک کنشگر نسبت به باورهای دیگرش (باورهای از مراتب بالاتر) به همان شکلی رفتار می‌کنند که باورهای فرد نسبت به وقایع جهان

عمل می‌کنند. این نکته سبب پیش آمدن تناقض گفته شده می‌شود. در واقع کنشگر درون‌نگر از آن جا که نسبت به باورهای خودش معرفت دارد نمی‌تواند فرضی علیه دانشش داشته باشد. یک سیستم باور فرضی (مانند تئوری s_a^R در مثال نقض بالا) می‌تواند تقریر حقیقی متفاوتی با سیستم باور غیر شرطی داشته باشد (s_a)؛ اما آن همان تقریر باوری (معرفتی) $B_a^P Q$ را به عنوان سیستم باور غیر شرطی دارد. بنابراین باورهای کنشگر درون‌نگر نسبت به باورهایش با توجه به نظریه‌ی تغییر باور ایستا نمی‌توانند تغییر کنند. تنها سیستم‌های تغییر باور پویا که در آنها نمایش باورهای تغییر کرده کنشگر پس از تغییر می‌باشد می‌توانند در شرایطی از محک رمزی سربلند بیرون بیایند.

فصل ۳

تغییر باور پویا

عمل تغییری که توسط باورهای شرطی بیان شد ایستا و کاملاً فرضی است. نمی‌توانیم $B_a{}^{\varphi}\varphi$ را به گونه‌ای تعریف کنیم که به باورهای تغییر کرده‌ی کنشگر پس از تغییر اشاره کند. در غیر این صورت اصل "موفقیت"

$$\vdash B_a{}^{\varphi}\varphi،$$

برای باورهای از مرتبه‌ی بالا برقرار نخواهد بود. برای مشاهده‌ی این موضوع جمله‌ی زیر که به "جمله‌ی مور[۱]" معروف است را در نظر بگیرید.

$$\varphi := p \wedge \neg B_a p.$$

این جمله می گوید p برقرار است ولی کنشگر a به آن باور ندارد. جمله‌ی φ سازگار است. بنابراین ممکن است شرایطی رخ دهد که این جمله درست باشد. اما باور کنشگر a درباره‌ی موقعیتی پس از متوجه شدن اینکه φ درست است نمی‌تواند شامل خود جمله‌ی φ باشد. پس از یادگیری این جمله، کنشگر p را می‌داند و به p باور دارد، دقیقاً مخالف آنچه که φ بیان می‌کند. بنابراین پس از یادگیری φ کنشگر a می‌داند که φ غلط است. جدا از اینکه کنشگر باور می‌کند جمله‌ای پس از یادگیری درست است، می‌داند یا باور می‌کند که آن قبل از یادگیری غلط بوده است. در این جا پارادوکسی وجود ندارد. جملات ممکن است ارزش‌شان تغییر کند. این فرآیند نشان‌دهنده‌ی نوعی کنش است. از آنجا که یادگیری ارزش یک جمله، خودش یک کنش است، این سازگار است با این که یادگیری موضوعی، ارزش خیلی از جمله‌ها را که قبلاً یاد گرفته بودیم را تغییر دهد. بدون وجود هیچ تناقضی

[۱] Moore sentence

جملاتی مانند جمله‌ی مور نشان می‌دهد که اصل "موفقیت" به‌درستی باورهای یک کنشگر را بعد از اینکه متوجه حقیقتی شد را توصیف نمی‌کند.

تنها راه برای فهمیدن اصل "موفقیت" برای باورهای از مرتبه‌ی بالا این است که آنها را به صورت ایستا در نظر بگیریم. باور شرطی $B_a{}^{\varphi}\varphi$ بیانگر باورهای تغییر کرده‌ی کنشگر درباره‌ی چگونگی حالت جهان مورد نظر قبل از تغییر است.

بهنگام‌کردن باور، یک فرم تغییر باور پویا[۲] است. بدین معنا که نشان‌دهنده‌ی تغییرات واقعی باورهایی است که بوسیله‌ی یادگیری موضوعی تعریف می‌شوند. باورهای بهنگام‌شده درباره‌ی حالت جهان پس از بهنگام‌شدن است. همانطور که در [۵، ۴، ۲۱] بحث شده است مدل‌های اولیه به اندازه‌ی کافی شامل نقاط برای نشان دادن احتمالات مختلف نیستند. در واقع بر خلاف بخش قبل مدل‌ها در این بخش می‌توانند تغییر کنند. اساس کار ما مقاله‌های [۶، ۸] است. ما در اینجا از یک نماد کمی بهنگام‌شدن استفاده کرده‌ایم. این تعریف کمی بر اساس تعاریف رابطه‌ای است. راحت‌ترین راه برای تعریف یک رابطه‌ی جزئی بر روی یک حاصلضرب دکارتی استفاده از قواعد لغت‌نویسی و یا ضد لغت‌نویسی است که در اینجا از رابطه‌ی ضد لغت‌نویسی استفاده می‌کنیم، چرا که با توجه به اصول نظریه‌ی کلاسیک AGM آن تقدم را به اطلاعات جدید می‌دهد (این اطلاعات جدید همان کنش‌ها هستند.). درواقع دلیل انتخاب ما این است که با توجه به تعبیری که بیان خواهیم کردیم، مدل‌های کنشی به‌عنوان باورهای کسب شده توسط کنشگر هستند.

۱.۳ سناریوی بچه‌های گلی

در یک باغ بزرگ، زیر درختان بلند سه کودک با هوش به نام‌های آدام، اوی و ماری در حال بازی کردن هستند. پدر آنها ازشان خواسته که مواظب باشند گلی نشوند. بر خلاف نصیحت پدر آدام و اوی پیشانیشان گلی شده است. اما ماری که فرزندی مطیع است پیشانیش تمیز مانده است. پدر بعد از مدتی پیش بچه‌ها می‌آید و از آنها می‌پرسد ببینم، کدام یکی از شماها پیشانی‌اش کثیف نشده است. یک راه حل این معما به این‌گونه است که پدر اینقدر سؤالش را تکرار کند و از ماری، آدام و اوی بپرسد تا آنها از راه منطقی متوجه شوند که آیا پیشانیشان کثیف

[۲] Dynamic Belief Revision

است یا نه (اگر یک نفر ببیند که پیشانی دو نفر دیگر تمیز است می‌تواند نتیجه بگیرد که پیشانی خودش باید کثیف باشد.). اما در این میان اوی که کودکی بی‌صبر و کم‌حوصله است بدون آنکه کسی مشکوک شود از آینه‌ی جیبی‌اش استفاده می‌کند و متوجه می‌شود که پیشانی‌اش کثیف است و جواب می‌دهد: پدر پیشانی من کثیف است معذرت می‌خواهم. در این میان ماری و آدام جوابی نداشته که به پدرشان بدهند. پدر برای بار دوم سؤالش را تکرار می‌کند. با توجه به این فریب اوی، آدام و ماری چه جوابی خواهند داد؟ ماری که می‌بیند پیشانی آدام و اوی هر دو کثیف است از پاسخ اوی به شدت تعجب می‌کند، چرا که او با توجه به منطق نمی‌تواند جوابی بدهد. ماری با خودش فکر می‌کند یا اوی کلکی در کارش است یا او دیوانه شده است. پس ماری در پرسش دوم پدر می‌گوید من نمی‌دانم. آدام نیز که متوجه فریب اوی نشده بود با توجه به منطق صدق نگه دار[۳] به اشتباه پاسخ می‌دهد که پیشانی من تمیز است. وقتی ماری این جواب را می‌شنود متوجه می‌شود که آدام از چه روشی استفاده کرده است. پس بایستی پیشانی خودش تمیز باشد و می تواند به پدر که برای سومین دفعه سوالش را تکرار می‌کند پاسخ دهد. در ادامه‌ی دو نوع آگاهی‌بخشی که در این سناریوی رخ داده یعنی آگاهی‌بخشی عمومی و آگاهی‌بخشی خصوصی را صوری می‌کنیم و در ادامه‌ی این بخش این شیوه‌های آگاهی‌بخشی را به طور کلی و مجردتر بررسی می‌کنیم.

۱.۱.۳ آگاهی‌بخشی عمومی

در این بخش ما عملگر آگاهی‌بخشی عمومی[۴] را معرفی می‌کنیم که مدل شناختی ما (معرفت، باور) را به صورت مینیمال تغییر می‌دهد. فرض کنید که مدل S (CDM) همراه با تابع نمایش و تابع ارزیاب s_a^Q، $\| \bullet \|$ داده شده باشد. برای هر S-گزاره‌ی P، مدل تغییر یافته CDM $\mathbf{P!(S)}$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

۱) مجموعه‌ی حالت‌های $\mathbf{P!(S)}$ همان مجموعه‌ی P است.

۲) برای هر $s \in P$ و هر $Q \subseteq P$ داریم $(s_a^Q)_{\mathbf{P!(S)}} := s_a^Q$.

۳) $\| p \|_{\mathbf{P!(S)}} := \| p \| \cap P$.

به عنوان یک نتیجه‌ی ابتدایی می‌توان مشاهده کرد که باورهای غیر شرطی پس از بهنگام‌شدن از باورهای شرطی قبلی بدست می‌آیند $(s_a)_{\mathbf{P!(S)}} = (s_a^P)_{\mathbf{P!(S)}} = s_a^P$.

---
[۳] Rithful logic
[۴] Public Announcement

کنش $P!$ را به شکل یک رابطه‌ی انتقال که حالت $s \in \mathbf{S}$ را که P را ارضاء می‌کند به حالت $s \in \mathbf{P!}(\mathbf{S})$ منتقل می‌کند تعبیر می‌کنیم. نحو آگاهی‌بخشی عمومی با اضافه کردن عملگر وجهی پویای $<!\varphi>$ به نحو منطق CDL بدست می‌آید. برای تکمیل ساختار معنایی نیز معادله‌ی زیر را اضافه خواهیم کرد.

$$\| < \varphi! > \psi \|_{\mathbf{S}} = \| \psi \|_{\|\varphi\|_{\mathbf{S}!(S)}}.$$

برای بدست آوردن تمامیت و درستی دستگاه استنتاج بالا اصول زیر را به اصول CDL اضافه می‌کنیم.

$$< \varphi! > p \quad \longleftrightarrow \quad \varphi \wedge p;$$

$$< \varphi! > \neg\psi \quad \longleftrightarrow \quad \varphi \wedge \neg < \varphi! > \psi;$$

$$< \varphi! > (\psi \wedge \theta) \quad \longleftrightarrow \quad < \varphi! > \psi \vee < \varphi! > \theta;$$

$$< \varphi! > CK_a{}^{\theta}\psi \quad \longleftrightarrow \quad \varphi \wedge CK_a{}^{<\varphi!>} < \varphi! > \psi;$$

$$< \varphi! > B_a{}^{\theta}\psi \quad \longleftrightarrow \quad \varphi \wedge B_a{}^{<\varphi!>\theta} < \varphi! > \psi;$$

$$< \varphi! > Cb_a{}^{\theta}\psi \quad \longleftrightarrow \quad \varphi \wedge Cb_a{}^{<\varphi!>\theta} < \varphi! > \psi.$$

۲.۱.۳ آگاهی‌بخشی خصوصی

در اینجا از کنش "یادگیری خصوصی یک حقیقت" یا به طور گسترده‌تر یک آگاهی‌بخشی خصوصی[۵] $P!_A$ برای یک زیر گروه از کنشگرها سخن می‌گوییم. به طور شهودی یک نوع آگاهی‌بخشی که بین گروه A منتشر می‌شود در حالی که افراد خارج گروه $B \notin A$ شکی به رخداد این آگاهی نمی کنند. برای سادگی در اینجا مواردی را در نظر می‌گیریم که این آگاهی یک دانش همگانی است و هیچ اتفاق دیگری پیش نیامده است، بدین معنی که این آگاهی ویژه (برای جمله‌ی مشخص P و گروه A) تنها پیغامی است که ممکن است در این زمان منتشر شود. شق دیگر این است که هیچ پیغامی ارسال نمی‌شود بدین معنی که کنش بی‌صدا $\tau_A P$ رخ داده است. یعنی که هیچ اتفاقی نمی‌افتد (اما افراد خارج از گروه این موضوع را نمی‌داند بنابراین آنها فکر می کنند که ممکن است پیغام

[۵] Private Announcement

P بین افراد گروه A منتشر شود.). فرض کنیدکه CDM -مدل $\mathbf{S}$ و S-گزاره‌ی $P \subseteq S$ داده شده باشد، مدل بهنگام‌شده‌ی CDM را تحت آگاهی‌بخشی خصوصی $\mathbf{P!_A(S)}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

برای هر حالت قدیمی $s \in S$ ما دو دسته‌ی جدید $P!_A(s)$ (نشان‌دهنده‌ی حالتی است که گروه A از P آگاه شده اند.) و $\tau_A P(s)$ (نشان‌دهنده‌ی حالتی است که افراد خارج گروه A، $b \notin A$ در نظر می‌گیرند که ممکن است که افراد A از P آگاه شده‌اند.)

(i) مجموعه‌ی جدید حالات $\mathbf{P!_A(S)}$ مجموعه‌ی $S' = P!_A(P) \cup \tau_a P(s)$ است؛

(ii) برای تمام $a \in A$: $P!_A(s)^Q_a := P!_A(s_a^{P!_A^{-1}(Q)})$ و $\tau_A P(s)^Q_a := \tau_A P(s_a^{\tau_A P^{-1}(Q)})$؛

(iii) برای تمام $b \notin A$: $\tau_A P(s)^Q_b = P!_A(s)^Q_b := \tau_A P(s_b^{\tau_A P^{-1}(Q)})$ اگر $s(b) \cap \tau_A P^{-1}(Q) \neq \varnothing$ و در غیر این صورت $\tau_A P(s)^Q_b = P!_A(s)^Q_b := P!_A(s_b^{P!_A^{-1}(Q)})$؛

(iv) $\parallel p \parallel_{S'} := P!_A(\parallel p \parallel_S) \cup \tau_A P(\parallel p \parallel_S)$.

از نمادهای $\sigma(Q) := \{\sigma(s) : s \in Q\}$ و $\sigma^{-1}(Q') := \{s \in S : \sigma(s) \in Q'\}$ برای هر دو "عمل" $\sigma \in P!_A, \tau_A P$ و برای تمام مجموعه‌های $Q \subseteq S, Q' \subseteq S'$ استفاده می‌کنیم. برای بند دوم افراد داخل گروه می‌دانند که کنش σ اتفاق اقتاده است. (چه $P!_A$ رخ داده باشد یا $\tau_A P$) بنابراین اگر بعد از کنش به آنها اطلاعات جدید Q داده شود آنهامطابق الگوریتم زیر عمل می‌کنند. آنها ابتدا باورهایشان را در مورد حالت‌های گذشته، با توجه به اطلاعات جدید مورد تغییر می‌دهند بدین معنا که آنها ابتدا بایستی باورهایشان را با این حقیقت که (بعد از این که این کنش مشخص رخ داد.) Q درست است تغییر دهند؛ بنابراین آنها باورهایشان را در مورد حالات گذشته با توجه به $\sigma^{-1}(Q)$ تغییر می دهند. سپس آنها با تأثیر کنش σ به حالاتی که توسط این باورهای گذشته اجازه داده شده به وضع فعلی برمی‌گردند. این امر به آنها باور حاضر در مورد حالت جهان پس از کنش σ را می‌دهد.

در بند سوم نیز افراد خارج گروه الگوریتمی مشابه را انجام می‌دهند. اما (نمیدانند که حقیقتاً کدام کنش رخ داده است.) آنها باورهای اولیه خود را (در مورد آنچه می‌بینند.) حفظ می‌کنند. یعنی اینکه کنش $\tau_A P$ (هیچ اتفاقی) رخ داده است. بنابراین آنها الگوریتم بند دوم را برای $\sigma = \tau_A P$ اجرا می کنند؛ مگر آنکه آن با اطلاعات جدید Q در تناقض باشد. بدین معنا که اگر آنها اکنون بدانند Q بعد از کنش $\tau_A P$ نمی‌تواند درست باشد، آنها باورشان در

مورد کنش حاضر را تغییر خواهند داد. آنها باور خواهند کرد که $P!_A$ رخ داده است. بنابراین آنها الگوریتم بالا را برای کنش $\sigma = P!_A$ پیاده خواهند کرد.

در مورد نحومان عملگر وجهی $<!\varphi>$ را با عملگرهای پویای $<\varphi!_A>$ و $<\tau_A\varphi>$ متناظر با دو نوع کنش بالا جایگزین می‌کنیم. معناشناسی‌مان نیز با توجه به PDL استاندارد به صورت زیر خواهد بود.

$$\| < \sigma > \psi \|_{\mathbf{S}} := \{ s \in S : \exists \sigma(s) \quad \sigma(s) \in \| \psi \|_{\mathbf{S}'} \}.$$

برای بدست آوردن دستگاه کامل استنتاج اصول تحویل پذیری برای منطق شرطی را با اصول زیر جایگزین می کنیم (برای تمام افراد گروه $a \in A$ و افراد $b \in B$).

$$< \varphi!_A > B_a{}^{\theta}\psi \quad \longleftrightarrow \quad \varphi \wedge B_a{}^{<\varphi!_A>\theta} < \varphi!_A > \psi;$$

$$< \tau_A\varphi > B_a{}^{\theta}\psi \quad \longleftrightarrow \quad B_a{}^{<\tau_A\varphi>\theta} < \tau_A\varphi > \psi;$$

$$< \varphi!_A > B_b^{\theta}\psi \quad \longleftrightarrow \quad \varphi \wedge B_b{}^{<\tau_A\varphi>\theta} < \tau_A\varphi > \psi \wedge \left(K_b\left[\tau_A\varphi\right]\neg\theta \longrightarrow B_b{}^{<\varphi!_A>\theta} < \varphi!_A > \psi\right);$$

$$< \tau_A\varphi > B_b^{\theta}\psi \quad \longleftrightarrow \quad B_b{}^{<\tau_A\varphi>\theta} < \tau_A\varphi > \psi \wedge \left(K_b\left[\tau_A\varphi\right]\neg\theta \longrightarrow B_b{}^{<\varphi!_A>\theta} < \varphi!_A > \psi\right).$$

با این اصلاحات و حذف اصول و قواعد مربوط به دانش و باور همگانی یک دستگاه کامل و تمام برای منطق آگاهی‌بخشی خصوصی بدست می آوریم(بدون دانش و باور همگانی). نهایتاً مشابه پویای محک رمزی را (که بر خلاف حالت ایستا معتبر است.) را بیان می کنیم.

$R!_a(s)_a \subseteq B_a[P!_a]Q$ اگر و تنها اگر $P!_a(R!_a(s)_a) \subseteq Q$.

۳.۱.۳ صوری کردن سناریوی بچه‌های گلی

حال به سناریوی بچه‌های گلی برمی‌گردیم. فرض کنید که برای اوی (e)، آدام (a) و مری (m) ما حالت‌ها یا وضعیت‌های ممکن این افراد در مدل اولیه‌ی $\mathbf{S}$ را بوسیله‌ی $x = (x^e, x^a, x^m)$ نشان می‌دهیم که در آن $x^e, x^a, x^m \in \{0, 1\}$ است. 0 نشانگر تمیزی و 1 نشانگر کثیفی است. رابطه‌ی شناختی نیز واضح است، هر

کدام از کنشگرها می‌تواند دو کنشگر دیگر را ببیند اما نمی‌توانند خودش را ببینند. بنابراین $x(i) = \{y \in S : y^j = x^i \forall j \neq i\}$. حال می توانیم این سناریو را توسط KB -مدل صوری کنیم. فرض کنید که کنشگرها در ابتدا بسیارمحتاط و هوشیار هستند. بدین معنی که تنها چیزهایی را باور می‌کنند که می‌دانند(در واقع مجموعه‌های $x_i = x(i)$.) برای باورهای شرطی می‌توانیم از $s_i{}^P = s_i \cap P$ برای زمانی که $s_i \cap P \neq \varnothing$ و برای بقیه‌ی موارد از $s_i{}^P = s(i) \cap P$ استفاده کنیم. حالت واقع از جهان $w = (1,1,0)$ و باور و معرفت اولیه‌ی مری به صورت $w_m = w(m) = \{(1,1,1),(1,1,0)\}$ است. پس از اطلاع پدرش حالت $(0,0,0)$ حذف می‌شود. نگاه کردن اوی به آینه می‌تواند به صورت آگاهی‌بخشی خصوصی $\gamma = 1^e!_e$ به خودش بیان شود (جمله‌ی اتمی 1^e بیانگر این است که پیشانی اوی کثیف است.). صورت دوم نگاه نکردن به صورت $\tau = \tau_e 1^e$ بیان می‌شود. بعد از کنش اوی در مدل حاصل $\mathbf{S}'$، دانش مری به صورت $\gamma(w)(m) = \{\tau(1,1,1), \tau(1,1,0), \gamma(1,1,1), \gamma(1,1,0)\}$ و باورهای مری به صورت $\gamma(w)_m = \{\tau(1,1,1), \tau(1,1,0)\}$ هستند. پس از آگاهی‌بخشی عمومی اوی $!(K_e 1^e)$ مدل به مدل کوچک شده‌ی $S'' = \parallel K_e 1^e \parallel_{\mathbf{S}'} = \{\gamma(1, x^a, x^m) : x^a, x^m \in 0,1\}$ تبدیل می‌شود. باورهای غیر شرطی که مری بعد از آگاهی‌بخشی عمومی بدست می‌آورد با استفاده از باورهای شرطی قبلی‌اش است $(\gamma(w)_m)_{\mathbf{S}''} = \gamma(w)_m{}^{S''}$. برای ارزیابی کردن آخرین مرحله به قسمت دوم معادله‌ی سوم از آگاهی‌بخشی خصوصی نیازمندیم (چون داریم $(w_m \cap \tau^{-1}\mathbf{S}'') = \varnothing$).

$$\left(\gamma(w)_m\right)_{\mathbf{S}''} = \gamma_m{}^{S''} = \gamma\left(w_m{}^{\gamma^{-1}(S'')}\right) = \gamma\left(w(m) \cap \gamma^{-1}(S'')\right) = \gamma\left(w(m)\right)$$ برابر

$\{\gamma(1,1,1), \gamma(1,1,0)\}$ است. این یک مجموعه‌ی ناتهی از حالت‌ها است. بنابراین مری اشتباه نکرده و دارای عقل سلیم است. علاوه‌بر این تمام حالت‌های ممکن خروجی‌اش نتیجه‌ی کنش γ است. بدین معنی که او می‌داند که γ اتفاق افتاده است. مری کشف می‌کند که فریب γ اتفاق افتاده است.

۲.۳ عمل بهنگام‌کردن در مدل‌های توجیه‌پذیر کنشی

۱.۲.۳ مدل توجیه‌پذیر کنشی

مدل توجیه‌پذیر کنشی[۶] یا به اختصار APM یک قاب توجیه‌پذیر $(\Sigma, \leq_a)_a$ به همراه یک تابع پیشینی $pre : \Sigma \longrightarrow Prop$ است که به هر عضو Σ گزاره‌ی باور pre_σ را نسبت می‌دهد. عناصر Σ را کنش‌های باور پایه و تابع pre_σ را پیش‌شرط[۷] کنش σ می‌نامیم. کنش اصلی $\sigma \in \Sigma$ به عنوان کنش تغییر باور قطعی تعبیر می‌شود. به طور شهودی تابع پیش‌شرط دامنه‌ی کنش σ را مشخص می‌کند بدین صورت که s در دامنه‌ی کنش σ قرار دارد اگر و تنها اگر s پیش‌شرط را ارضاء کند. رابطه‌ی $\leq_a$ باور کنشگر را نسبت به این که کدام کنش توجیه‌پذیرتر است را نشان می‌دهد.

مفهوم رویه‌ی[۸](برنامه) شناختی را برای مدل کردن کنش‌های غیر قطعی معرفی می‌کنیم. یک رویه‌ی شناختی روی یک مدل شناختی Σ (یا به اختصار Σ-رویه‌ها) یک زیر مجموعه‌ی $\Gamma \subseteq \Sigma$ از کنش‌های باور است. می توان رویه‌های باور را به عنوان کنش‌های غیر قطعی در نظر گرفت. در واقع هر یک از $\gamma \in \Gamma$ یک راه حل قطعی از Γ است. برای پرهیز از مبهم‌نویسی زمانی که $\Gamma = \{\gamma\}$ یک عضو دارد آن را با γ نشان می‌دهیم.

همانطور که مشاهده می‌کنید Σ-رویه‌ها $\Gamma \subseteq \Sigma$ مشابه پویای S-گزاره‌ها $P \subseteq S$ هستند. به همین ترتیب کنش شرطی مشابه نمایش باور شرطی s_a^P به صورت $\sigma_a{}^\Gamma$ است.

تعابیر: باور در مورد تغییرات نشان‌دهنده‌ی تغییرات باورها. شاید استفاده از "کنش‌های باور" کمی گمراه کننده بنظر برسد (ون‌بن‌تم با توجه به یک سبقه‌ی فلسفی از "رخدادهای باور[۹]" استفاده می‌کند.). چرا که عناصر یک مدل توجیه‌پذیر اطلاعاتی در مورد فاعلیت و یا حیث التفاتی در اختیار ما قرار نمی‌دهند. از این رو به معنای دقیق کلمه کنش‌ها را با تمام پیچیدگی هاشان بیان نمی‌کنند. در واقع تنها تغییرات باور با این کنش‌ها تعریف می‌شوند. هر یک از گره‌های یک مدل توجیه‌پذیر کنشی در واقع یک تغییر مشخص از باورها را مشخص می‌کند. ما تماماً از تغییرات باور صحبت می‌کنیم. کنش‌هایی که حقایق جهان را تغییر نمی‌دهند بلکه تنها باور کنشگرها را تغییر می‌دهند. علاوه بر این ما این تغییرات را قطعی در نظر می‌گیریم. نتیجه‌ی هر کنش روی یک حالت

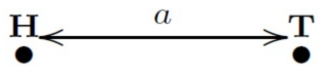
---
[۶] Action plausibility model
[۷] Precondition
[۸] Porogram
[۹] Doxastic events

حداکثر یک خروجی دارد. تابع پیش‌شرط دامنه‌ی کنش σ را مشخص می‌کند بدین صورت که s در دامنه‌ی کنش σ قرار دارد اگر و تنها اگر s پیش‌شرط را ارضاء کند. رابطه‌ی $\leq_a$ باور کنشگر را نسبت به این که کدام کنش توجیه‌پذیرتر است را نشان می‌دهد. به کمک رابطه‌ی جزئی توجیه‌پذیری $\leq_a$ باورهای شرطی کنشگرها درباره‌ی کنش مشخصی بیان می‌شود که در واقع این مفهوم می‌بایستی به این صورت تعبیر شود که "باورهای در مورد تغییرات" نشان‌دهنده‌ی (دربردارنده‌ی) تغییرات در مورد باورها هستند. ما از این "باورهای در مورد تغییرات" به عنوان راهی برای بیان کردن تغییرات باور استفاده می‌کنیم. در واقع اینکه کنشگر باورهایش را تغییر می‌دهد توسط رابطه‌ی توجیه‌پذیر کنشی مشخص می‌شود. بنابراین عبارت $\sigma <_a \sigma'$ به این صورت خوانده می‌شود که اگر کنشگر a مطلع شود یکی از σ یا σ' در حال حاضر اتفاق خواهد افتاد، نمی‌تواند بین این دو کنش تمایزی قائل شود اما باور خواهد کرد که σ در حقیقت اتفاق خواهد افتاد. نهایتاً برای کنش σ و رویه‌ی Γ، رویه‌ی ${\sigma_a}^\Gamma$ نشان‌دهنده‌ی تئوری (باور) تغییر کرده کنشگر در مورد کنش حاضر σ بعد از اینکه فهمید (کنش قطعی یکی از اعضای γ در Γ)، Γ در حال حاضر اتفاق خواهد افتاد، است.

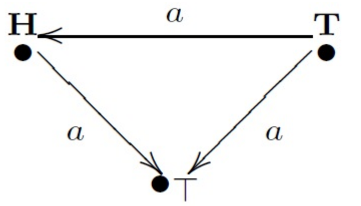
مثال ۵ (آگاهی‌بخشی خصوصی(به طور جوانمردانه)). کنشی که در مثال ۳ رخ داد را درنظر بگیرید. باب در مقابل آلیس به سکه نگاه می‌کند. هر دو نفر (به شکل دانش همگانی) می‌دانند که باب به سکه نگاه کرده است. در متون مربوط به منطق شناختی پویا این آگاهی‌بخشی را جوانمرادنه[۱۰] می گویند، بدین معنا که هر کنشگری به شکل همگانی می‌داند که یک کنشگر یا گروهی (اصطلاحاً رازدار) به شکل محرمانه (خصوصی) اطلاعاتی را یاد می‌گیرند. به عنوان مثال آلیس می‌داند که باب به سکه نگاه کرده است و باب نیز می‌داند که آلیس می‌داند که او به سکه نگاه کرده است. این کنش جوانمرادنه است بخاطر اینکه سایرین فریب داده نشده‌اند. به عبارت دیگر نگاه باب به سکه یک رفتار (کنش) غیر قانونی نیست و او از قوانین بازی اطاعت کرده است. برای دقیق کردن این موضوع فرض کنید که آلیس باور قوی‌ای در مورد کنش‌های ممکن (اینکه باب ببیند سکه از رو یا پشت قرار گرفته است.) ندارد. همچنین باب به سکه نگاه می‌کند. خب در این حالت همانطور که قبل از نگاه باب به سکه فرض کردیم آلیس هم‌اکنون باور دارد که سکه از رو قرار گرفته است. اما جدا از این فرض، ما فرض کرده‌ایم که

[۱۰] Fair-Game

راه‌هایی که کنش مورد نظر (نگاه کردن باب به سکه) رخ می‌دهد هیچ اطلاعاتی در مورد وضعیت سکه نمی‌دهد. ما این دو کنش را توسط مدل توجیه‌پذیر دونقطه‌ای Σ_2 نشان می دهیم(پیکان ها را بر همان اساس که بیان کردیم رسم می‌کنیم.).



مثال ۶ (آگاهی‌بخشی خصوصی)**.** کنشی که در مثال ۴ رخ داد را در نظر بگیرید. فرض کردیم که باب نگاهی به سکه انداخته است اما آلیس از این موضوع خبری ندارد. همچنین فرض کردیم که آلیس باور دارد که در غیاب او هیچ اتفاقی نمی‌افتد (چرا که او فرض کرده است که باب پایبند به قوانین است.)، همچنین او نمی‌داند که هیچ اتفاقی نیز نمی‌افتد. در منطق شناختی پویا این کنش با نام آگاهی‌بخشی خصوصی معرفی شده است. باب متوجه می‌شود که سکه به چه شکل قرار گرفته است اما سایرین باور دارند هیچ اتفاقی رخ نداده است. این فرآیند را با مدل کنشی Σ_3که شامل سه کنش است، نشان می‌دهیم. کنش واقع σ که باب به سکه نگاه می‌کند و می‌بیند سکه از رو قرار گرفته است؛ کنش ممکن ρ که باب به سکه نگاه می‌کند و می‌بیند سکه از پشت قرار گرفته است؛ نهایتاً کنش τ که بیان می‌کند هیچ اتفاقی رخ نداده است (همچنان که آلیس باور دارد.). مدل توجیه‌پذیر Σ_3 برای این کنش‌ها به صورت زیر است.



در این مدل کنش σ در سمت چپ بالا قرار دارد و دارای پیش‌شرط $\mathbf{H}$ است. این کنش می‌تواند رخ دهد اگر و تنها اگر سکه واقعاً از رو قرار رفته باشد. به طور مشابه کنش ρ در سمت راست بالا قرار دارد و دارای تابع پیش‌شرط $\mathbf{T}$ است. نهایتاً کنش τ که در پایین قرار دارد و پیش‌شرط آن گزاره همواره صادق $\top$ است. این کنش همیشه میتواند اتفاق افتد (چرا که در عمل هیچ کنشی رخ نمی‌دهد.). رابطه‌ی توجیه‌پذیری بازتاب باورهای

کنشگر است. از آنجا که باب و داور می‌دانند چه کنشی رخ خواهد داد پس مدل آنها همانی است که نشان داده‌ایم. آلیس باور دارد که هیچ اتفاقی رخ نخواهد داد. بنابراین کنش τ بیشترین توجیه‌پذیری را دارد و از آنجایی که باور دارد $\mathbf{H}$ رخ خواهد داد کنشσ را توجیه‌پذیرتر از ρ در نظر خوهد گرفت.

مثال ۷ (رویه‌های باور). رویه‌ی $\Gamma = \{\sigma, \rho\} \subseteq \Sigma_3$ را از مثال ۶ در نظر بگیرید. این رویه بیانگر این کنش است که باب یک نگاه به سکه می‌اندازد بدون مشخص کردن اینکه او سکه را در چه وضعیتی می‌بیند. اگر چه این کنش به طریق غیر قطعی (یکی از کنش‌های σ یا ρ) بیان می‌شود اما در هر حالت ممکن تنها یکی از دو کنش σ یا ρ رخ خواهد داد، چرا که هیچ حالت ممکنی $\mathbf{H}$ و $\mathbf{T}$ را با هم ارضاء نمی‌کند. تمام مجموعه‌ی Σ، رویه‌ی باور دیگری را معرفی می‌کند که تعبیر آن بدین قرار است که باب به صورت غیر قطعی بین نگاه کردن به سکه و یا اینکه این کار را انجام ندهد یکی را انتخاب می‌کند.

مثال ۸ (دروغ موفق). مثال ۴ را در نظر بگیرد. پس از این که باب به سکه نگاه کرد، به دروغ می گوید من به سکه نگاه کردم و دیدم که سکه از پشت قرار گرفته است. محتوای این خبر را به صورت $K_b\mathbf{T}$ صورت‌بندی می‌کنیم. این گزاره بیان می‌کند،" باب می‌داند که سکه از پشت قرار گرفته است". این یک آگاهی‌بخشی عمومی است، اما درست نیست (هر چند شامل مقداری درست از اطلاعات باشد.). در واقع این یک دروغ است!. ما فرض می‌کنیم که این یک دروغ موفقیت آمیز[11] است. بدین معنی است که پس از اینکه باب به سکه نگاه کرد، آلیس به او باور دارد و این باور آلیس یک دانش همگانی است. این کنش به صورت گره‌ی سمت چپ مدل Σ_4 بیان شده است.

$$\underset{\bullet}{\neg K_b \mathbf{T}} \xrightarrow{\quad a \quad} \underset{\bullet}{K_b \mathbf{T}}$$

[11] Successful lie

۲.۲.۳ عمل بهنگام‌کردن کنشی‌مقدم در مدل‌های توجیه‌پذیر

در اینجا عمل بهنگام‌کردن را معرفی می‌کنیم که در واقع بیانگر چگونگی کنش یک مدل توجیه‌پذیر (کنشی) $(\Sigma, \leq_a, pre)_{a \in \mathcal{A}}$ به روی یک مدل داده شده، به صورت یک مدل توجیه‌پذیر (ایستا) $\mathbf{S} = (\Sigma, \leq_a, \|\ .\ \|)_{a \in \mathcal{A}}$ است. مدل بهنگام‌شده‌ی (ایستا) به صورت $\mathbf{S} \otimes \mathbf{\Sigma}$ است.

۳.۲.۳ بهنگام‌کردن کنشی‌مقدم مدل‌های یک کنشگره: رابطه‌ی ضد لغت‌نویسی

ابتدا عمل بهنگام‌کردن کنشی‌مقدم را برای مدل‌های یک کنشگره بررسی می‌کنیم. فرض کنید که $(S, \leq, \|\ .\ \|)$ یک مدل توجیه‌پذیر یک کنشگره و $(\Sigma, \leq, pre)$ یک مدل توجیه‌پذیر کنشی یک کنشگره است. نقاط مدل بهنگام‌شده‌ی $\boldsymbol{S} \otimes \mathbf{\Sigma}$ را به صورت جفت مرتب‌های (s, σ) از حالت اولیه و کنش‌ها به عنوان عناصری از حاصل ضرب $S \times \Sigma$ نمایش می‌دهیم. این نمایش در واقع نشان‌دهنده‌ی قطعی بودن عمل کنش است. یعنی یک حالت اولیه و یک کنش حداکثر دارای یک خروجی هستند. در حقیقت جفت مرتب‌هایی را انتخاب می‌کنیم که با هم سازگار هستند. بدین معنا که حالت اولیه پیش‌شرط کنش را ارضاء کند. بنابراین مجموعه‌ی حالت‌های

مدل بهنگام‌شده‌ی $\boldsymbol{S} \otimes \mathbf{\Sigma}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S \otimes \Sigma := \{ (s, \sigma) : s \vDash_{\mathbf{s}} pre(\sigma) \}.$$

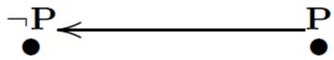
تابع ارزیاب این مدل جدید توسط تابع ارزیاب مدل اولیه بیان می‌شود.

برای تمام $(s, \sigma) \in S \otimes \Sigma$ قرار دهید:

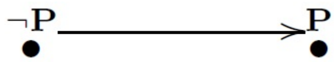
$(s, \sigma) \vDash p$ اگر و تنها اگر $s \vDash p$.

این نحوه‌ی تعریف تابع ارزیاب نشان‌دهنده‌ی این است که تنها کنش‌هایی را در نظر می‌گیریم که کاملاً تغییر باور هستند. یعنی هیچ تأثیری در حقایق هستی‌شناسانه جهان (که در اینجا توسط اتم‌های گزاره‌ای بیان شده است.) ندارد. بالاخره لازم است یک رابطه‌ی توجیه‌پذیری مناسب برای این مدل بهنگام‌شده بیان کنیم.

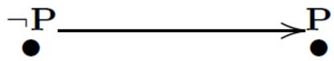
مثال ۹. فرض کنید که دو حالت $s, s' \in \mathbf{S}$ چنان موجودند که $s < s', s \vDash \neg\mathbf{P}, s' \vDash \mathbf{P}$. این بدین معنی است که اگر اطلاعات کافی در مورد این که جهان واقع s یا s' است موجود باشد، کنشگر $\neg\mathbf{P}$ را باور می‌کند.



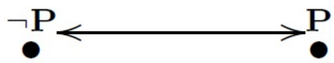
فرض کنید که یک رویداد، در قالب مدلی که دو کنش σ، σ' با شرایط $\sigma < \sigma', Pre_\sigma = \neg\mathbf{P}, Pre_{\sigma'} = \mathbf{P}$ رخ داده است. به عبارت دیگر اگر اطلاعاتی داده شود که σ یا σ' رخ خواهد داد، کنشگر باور خواهد کرد که σ' رخ خواهد داد. او باور خواهد کرد که $\mathbf{P}$ یاد گرفته خواهد شد .این قسمت از مدل مانند آگهی‌بخشی عمومی نرم عمل می‌کند.



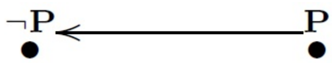
به طور طبیعی انتظار داریم که کنشگر باورهایش را تغییر دهد. رابطه‌ی توجیه‌پذیری بهنگام‌شده‌ی او به صورت زیر است.



مثال ۱۰. فرض کنید که حالت اولیه مانند مدل بالا باشد. اما فرض کنید که دو کنش σ و σ' یکسان توجیه‌پذیرند. $\sigma \cong \sigma'$. این یک آگاهی‌بخشی کاملاً غیر قابل اطمینان درباره‌ی $\mathbf{P}$ است. در واقع درست و غلط بودن این آگاهی‌بخشی یکسان توجیه‌پذیرند.



در نظریه‌ی AGM طبیعی به نظر می رسد که کنشگر باورهای گذشته‌اش را پس از این رویداد حفظ کند.



رابطه‌ی ضد لغت‌نویسی

رابطه‌ی جزئی مدل بهنگام‌شده را به صورت رابطه‌ی ضد لغت‌نویسی[۱۲] به کمک رابطه‌های جزئی روی S و Σ تعریف می‌کنیم که به صورت زیر است.

$(s,\sigma) \leq (s',\sigma')$ اگر و تنها اگر $\sigma < \sigma'$ یا در غیر این صورت $\sigma \cong \sigma'$ و $s \leq s'$.

رابطه‌ی مدل بهنگام‌شده تقدم را به رابطه‌ی توجیه‌پذیر کنشی می‌دهد. این همان نقطه‌ی اتصال ما با نظریه‌ی تغییر باور AGM است. در نظریه‌ی AGM اطلاعات جدید به باورهای قبلی تقدم دارند. کنش‌ها در اینجا بیانگر "اطلاعات جدید" هستند. اگر چه (برخلافAGM) این اطلاعات به صورت پویا بیان می‌شوند (به عنوان رابطه‌ی توجیه‌پذیر کنشی). بنابراین قابل کاهش به گزاره‌ها نیستند (پیش‌شرط‌های کنشی).

۴.۲.۳ بهنگام‌کردن مدل‌های با چند کنشگر: حالت کلی

در حالت چند کنشگره مجموعه‌ی حالات و تابع ارزیاب مدل بهنگام‌شده همانند قبل است. اما در مورد رابطه‌ی توجیه‌پذیری مدل بهنگام‌شده در مدل چند کنشگره حالت سومی وجود دارد که می‌بایست در نظر گرفت. حالتی که حالات اولیه و یا کنش‌ها تمایزپذیر باشند یعنی به سلول‌های مختلفی تعلق داشته باشند. باتوجه به این مطلب قاعده‌ی" تقدم- کنش" به صورت زیر تعریف می‌شود.

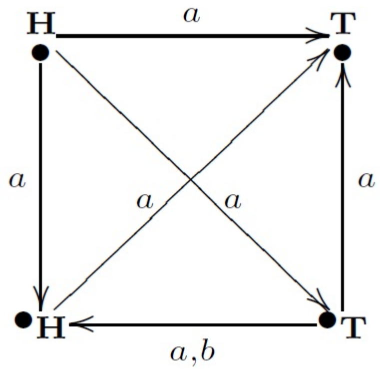
$(s,\sigma) \leq_a (s',\sigma')$ اگر و تنها اگر $\sigma <_a \sigma'$ و $s \sim_a s'$ یا در غیر این صورت $\sigma \cong {}_a\sigma'$ و $s \leq_a s'$.

مثال ۱۱. فرض کنید که دو حالت $s, s' \in \mathbf{S}$ چنان‌اند که $s \vDash \neg\mathbf{P}, s' \vDash \mathbf{P}$ اما $s \nsim s'$ تمایز ناپذیرند (قابل مقایسه نیستند.).

[۱۲] The anti-lexicographic order

این بدین معنی است که اگر اطلاعات کافی به کنشگر داده شود که جهان واقع s یا s' است او خواهد فهمید که جهان واقع کدام است. بنابراین او خواهد دانست که چه زمان $\mathbf{P}$ برقرار است. این آشکار به نظر می‌رسد که کنشگر (با حافظه) پس از هر کنشی (برای مثال کنش‌هایی که در دو مثال قبل در نظر گرفتیم.) خواهد دانست که چه زمان $\mathbf{P}$ برقرار است و چه زمان برقرار نیست. بنابراین حالت‌های ممکن بعد از کنش σ و σ' تمایز ناپذیر خواهند بود.

مثال ۱۲ (“تست با خوشفکری[۱۳]” دروغ موفقیت آمیز). با تأثیر مدل کنشی Σ_4 در مثال ۸ به عنوان تعبیر کنش ” دروغ موفقیت آمیز” به روی مدل $\mathbf{S}'$ حالت خروجی “دروغ موفقیت آمیز” (که به طور شهودی درست است.) را بدست می آوریم که با $\mathbf{S}' \otimes \mathbf{\Sigma}$ نشان می دهیم.



تعبیر باتوجه به نام‌گذاری قاعده‌ی بالا به عنوان قاعده‌ی تقدم-کنش این قاعده تقدم را به رابطه‌ی توجیه‌پذیر کنشی می‌دهد. این تعریف تعریفی دلخواه نیست بلکه بر اساس تبیینی که در مورد رابطه‌ی توجیه‌پذیر کنشی بیان کردیم است. باور در مورد تغییرات (رابطه‌ی توجیه‌پذیر کنشی) چیزی جز راه‌هایی برای بیان کردن تغییر باورها نیست (رابطه‌ی توجیه‌پذیری اولیه را نشان می‌دهند.). بنابراین رابطه‌ی روی کنش‌ها نشان‌دهنده‌ی رابطه‌ی روی نقاط یا حالت‌ها نیز است. در واقع قاعده‌ی تقدم-کنش بیان می‌کند که رابطه‌ی $\sigma <_a \sigma'$ به روی کنش‌ها مربوط است به تغییر رابطه از حالت‌های (تمایزناپذیر) اولیه $s \sim_a s'$ به رابطه‌ی $(s,\sigma) \leq (s,\sigma')$ که حالت خروجی است. زمانی که کنش‌ها یکسان توجیه‌پذیر هستند $\sigma \cong_a \sigma'$ رابطه‌ی حالت اولیه را بدون تغییر رها می‌کنیم. $(s,\sigma) \leq (s,\sigma')$ اگر وتنها اگر $s \leq_a s'$.

[۱۳] In-sanity check

دادن تقدم به کنش‌های توجیه‌پذیر بدین معنی نیست که باورهای کنشگر نسبت به کنش‌ها قویتر از باورهایش نسبت به حالت‌ها و یا وضعیت‌های موجود نیست، بلکه نشانگر این حقیقت است که هنگام بهنگام‌شدن توسط یک کنش داده شده **باورهای نسبت به کنش مربوطه باورهای فعلی است، این‌ها باورهای ما درباره‌ی آنچه که اکنون رخ می‌دهد است، در حالی که باورهای اولیه مربوطه به گذشته است.** این کنش باور است که حالت و یا وضعیت باور را تغییر می‌دهد و برعکس این موضوع درست نیست. تعریف شدن بهنگام‌کردن باور توسط یک کنش مهم نیست آنچه که مهم است عمل بهنگام‌کردن توسط این کنش باور شده است. اگر باور به کنش σ نیازمند این باشد که کنشگر باورهای قبلی خودش را تغییر دهد بایستی این کار را انجام دهد. برای مثال در یک دروغ موفقیت آمیز، رابطه‌ی کنش‌های توجیه‌پذیر باعث می‌شود که شنونده باور کند که گوینده حقیقت را می گوید، بنابراین او حرف گوینده را قبول می‌کند (حتی اگرچه با دانشش در تضاد باشد.) و باورهای گذشته‌اش را تغییر دهد. این آن چیزی است که باعث موفق شدن دروغ می‌شود.

عمل بهنگام‌کردن کنشی‌مقدم گسترشی برای عمل بهنگام‌کردن

با توجه به تعریفی که از تمایزناپذیری رابطه‌ی $\sim_a$ در مدل توجیه‌پذیر بیان کردیم ($s \sim_a s'$ اگر وتنها اگر یکی از دوحالت $s \le_a s'$ یا $s' \le_a s$ بر قرار باشد.) به راحتی قابل بررسی است که عمل بهنگام‌کردن مقدم‌کنشی گسترشی از عمل بهنگام‌کردن به معنایی که توسط منطق شناختی پویا بیان شده است، می‌باشد.

$(s,\sigma) \sim_a (s',\sigma')$ اگر و تنها اگر $s \sim_a s'$ و $\sigma \sim_a \sigma'$.

انتقال‌های رویه

برای هر مدل ایستای $\mathbf{S}$ و هر رویه‌ی $\Gamma \subseteq \Sigma$ به روی یک مدل کنشی Σ یک رابطه‌ی انتقال $\xrightarrow{\Gamma}_{\mathbf{S}} \subseteq \mathbf{S}\times(S\otimes\Sigma)$ از $\mathbf{S}$ به $\mathbf{S}\otimes\mathbf{\Sigma}$ به صور زیر تعریف می‌شود.

$s \xrightarrow{\Gamma}_{\mathbf{S}} (s',\gamma)$ اگر و تنها اگر $s = s'$ ، $(s,\gamma) \in S\otimes\Sigma$ و $\gamma \in \Gamma$.

۵.۲.۳ شبیه‌سازی کردن راه‌های مختلف تغییر باور

در اینجا سه مثال از انواع تغییر باور مدل‌های چند کنشگر می آوریم: آگاهی‌بخشی عمومی از حقایق سخت، آگاهی‌بخشی عمومی از حقایق نرم و ترفیع محافظه کارانه.

آگاهی‌بخشی عمومی از"حقایق سخت"

آگاهی‌بخشی عمومی درست $\mathbf{P}!$ از برخی حقایق سخت[۱۴] $\mathbf{P}$ به طور کامل مربوط به نظریه‌ی تغییر باور نیست بلکه در مورد یادگیری از اطلاعات درست تصدیق شده است. پس از این آگاهی‌بخشی $\mathbf{P}$ به صورت دانش همگانی برقرار می‌شود. این کنش به این صورت عمل می‌کند که در هر مدل $\mathbf{S}$ تمام نقاط غیر $\mathbf{P}$ را حذف می‌کند، درحالیکه رابطه‌ی تمایزناپذیری و توجیه‌پذیری بین نقاط باقیمانده به صورت قبل باقی می‌ماند. این مدل کنشی در ساختار ما یک مدل یک نقطه‌ای که با $\mathbf{P}$ اندیس‌گذاری شده است، می‌باشد. این به راحتی دیده می‌شود که حاصل این عملگر معرفی شده با حاصل کنش این مدل یک نقطه‌ای توسط عمل بهنگام‌کردن لغت‌نویسی مشابه است.

آگاهی‌بخشی عمومی از "حقایق نرم" (ترفیع لغت‌نویسی)

عملگر $\mathbf{P} \Uparrow$ برای تغییر باور نرم[۱۵] معرفی شده است. این عملگر " بهنگام‌کردن لغت‌نویسی " نامیده می‌شود و به این صورت عمل می‌کند که تمام $\mathbf{P}$ -جهان‌ها بهتر از تمام $\neg\mathbf{P}$ -جهان‌ها در یک سلول اطلاعات می شوند. در هر بخش ($\mathbf{P}$ یا $\neg\mathbf{P}$) رابطه‌ی قبلی باقی می‌ماند. در ساختار ما این کنش متناظر مدل کنشی زیر است.

$$\underset{\bullet}{\neg\mathbf{P}} \xrightarrow{\quad a,b,c,\cdots \quad} \underset{\bullet}{\mathbf{P}}$$

[۱۴] Hard facts
[۱۵] Soft

ترفیع محافظه کارانه

عملگر $\uparrow \mathbf{P}$ نیز توسط ون‌بن‌تم برای ترفیع محافظه کار[۱۶] معرفی شده است. این عملگر به این صورت عمل می‌کند که در هر سلول اطلاعات، بهترین $\mathbf{P}$-جهان‌ها از همه‌ی جهان‌های دیگر در آن سلول اطلاعات بهتر می شوند(به این معنی که در هر سلول اطلاعات $\mathbf{P}$- حالاتی که بیشترین توجیه‌پذیری را دارند بیشترین توجیه‌پذیری را در سلول اطلاعات پیدا می‌کنند.). در حالتی که دستگاه ما دارای یک کنشگر است به راحتی قابل چک کردن است که داریم $\uparrow \mathbf{P} = \Uparrow (*_a \mathbf{P})$ ، که در آن $*_a$ همان عملگر یکان تغییر که قبلاً معرفی کردیم می‌باشد. در حالتی که $\mathcal{A} = \{1, ..., n\}$ و $n > 1$ کنشگر موجود باشد می توانیم عملگر $\uparrow \mathbf{P}$ را با استفاده از مدلی با 2^n کنش $\{\uparrow {}_I \mathbf{P}\}_{I \subseteq \mathcal{A}}$ مشابه‌سازی کنیم.

$$Pre_{\uparrow_I \mathbf{P}} = \bigwedge_{i \in I} *_i \mathbf{P} \wedge \bigwedge_{j \notin I} \neg *_j \mathbf{P},$$

$$\uparrow_I \mathbf{P} \leq_k \uparrow_J \mathbf{P} \Leftrightarrow J \cap k \subseteq I.$$

۶.۲.۳ عملگر روی رویه‌های باور

عملگر وجهی پویایی را تعریف می‌کنیم که ضعیف‌ترین پیش‌شرط رویه‌ی Γ را مشخص می‌کند. در واقع این روندی مشابه عملگرهای PDL برای رابطه‌های انتقال رویه‌ها $\xrightarrow{\Gamma}$ مابین مدل‌ها است.

عملگرهای وجهی پویا. فرض کنید که $\mathbf{\Sigma}$ یک مدل توجیه‌پذیر کنشی و $\Gamma \subseteq \Sigma$ یک مدل باور روی $\mathbf{\Sigma}$ است. برای هر گزاره‌ی باور $\mathbf{P}$، گزاره‌ی باور $[\Gamma]\mathbf{P}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$([\Gamma]\mathbf{P})_{\mathbf{S}} := [\xrightarrow{\Gamma}_{\mathbf{S}}]\mathbf{P}_{\mathbf{S}} = \Big\{ s : \forall t \in S \otimes \Sigma \quad (s \xrightarrow{\Gamma}_{\mathbf{S}} t \Rightarrow t \vDash_{\mathbf{S} \otimes \mathbf{\Sigma}} \mathbf{P}) \Big\}.$$

برای عملگر کنش پایه‌ی $\sigma \in \Sigma$ عملگر وجهی پویای $[\sigma]$ را باتوجه به تعریف بالا (برای رویه‌ی $\{\sigma\}$) به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

[۱۶] Conservative upgrade

$$([\sigma]\mathbf{P})_{\mathbf{S}} := ([\sigma]\mathbf{P})_{\mathbf{S}} = \{s \in S : \forall (s,\sigma) \in \boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{\Sigma} \Rightarrow (s,\sigma) \in \mathbf{P}_{\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{\Sigma}}\}.$$

لوزی نیز به صورت $\langle \Gamma \rangle \mathbf{P} := \neg[\Gamma]\neg\mathbf{P}$ تعریف می‌شود.

ترکیب ترتیبی. ترکیب ترتیبی[۱۷] $\boldsymbol{\Sigma};\boldsymbol{\Delta}$ از دو مدل کنشی توجیه‌پذیر $\boldsymbol{\Sigma} = (\Sigma, \leq_a, Pre)$، $\boldsymbol{\Delta} = (\Delta, \leq_a, Pre)$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

- مجموعه‌ی کنش‌های پایه همان مجموعه‌ی حاصلضرب $\Sigma \times \Delta$ است.
- تابع پیش‌شرط به صورت $Pre_{(\sigma,\delta)} := \langle \sigma \rangle Pre_{\delta}$ تعریف می‌شود.

• رابطه‌ی توجیه‌پذیری را به این صورت تعریف کنیم که $(\sigma,\delta) \leq_a (\sigma',\delta')$ اگر و تنها اگر $\sigma <_a \sigma'$ و $\delta \sim_a \delta'$ یا $\sigma \cong_a \sigma'$ و $\delta \leq_a \delta'$ باشد. منظو ما از نماد (σ,δ) این است که ابتدا σ سپس δ رخ می‌دهد. بنابراین از نماد زیر استفاده می‌کنیم.

$$\sigma;\delta := (\sigma,\delta).$$

می‌توان این نماد را برای رویه‌های باور نیز با توجه به تعریف ترکیب ترتیبی رویه‌های $\Gamma \subseteq \Sigma$ و $\Lambda \subseteq \Delta$، به عنوان یک رویه $\Gamma;\Lambda \subseteq \Sigma;\Delta$ روی مدل $\boldsymbol{\Sigma};\boldsymbol{\Delta}$ به صورت زیر تعریف کرد.

$$\Gamma;\Lambda := \{(\gamma,\lambda) : \quad \gamma \in \Gamma, \lambda \in \Lambda\}.$$

گزاره‌های زیر نشان‌دهنده‌ی این است که این ترکیب رفتاری مشابه رفتار ترکیبی دارد.

قضیه ۱.۲.۳. *برای هر مدل توجیه‌پذیر ایستای $\boldsymbol{S}$، مدل‌های کنشی $\boldsymbol{\Sigma}$ و $\boldsymbol{\Delta}$ و رویه‌های $\Gamma \subseteq \Sigma$، $\Lambda \subseteq \Delta$ نتایج زیر را داریم.*

۱. مدل‌های توجیه‌پذیر $(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{\Sigma})\otimes\boldsymbol{\Delta}$ و $\boldsymbol{S}\otimes(\boldsymbol{\Sigma};\boldsymbol{\Delta})$ توسط تابع کانونی $F : (S\otimes\Sigma)\otimes\Delta \to S\otimes(\Sigma;\Delta)$ با ضابطه‌ی زیر یکریخت هستند.

$$F(((s,\sigma),\delta)) := (s,(\sigma,\delta)).$$

---

[۱۷] Sequential composition

۲. *رابطه انتقال رویه‌ی $\Gamma;\Delta$ به صورت ترکیبی از رابطه‌های انتقال Γ و Δ و تابع یکریختی F است.*

$s \xrightarrow[\mathbf{S}]{\Gamma;\Delta} s'$ *اگر و تنها اگر* $w, t \in S \otimes \Sigma$ *چنان باشند که* $s \xrightarrow[\mathbf{S}]{\Gamma} w \xrightarrow[\mathbf{S}\otimes\Sigma]{\Delta} t$ *و* $F(t) = s'$.

اثبات. ر.ک.[۲۱]. ∎

اجتماع(انتخاب غیر قطعی[۱۸]). دو مدل کنشی توجیه‌پذیر $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma, \leq_a, Pre)$ و $\mathbf{\Delta} = (\Delta, \leq_a{}', Pre')$ را در نظر بگیرید. اجتماع مجزای $\mathbf{\Delta} \cup \mathbf{\Sigma}$ بدین صورت تعریف می‌شود که اجتماع مجزای $\Sigma \sqcup \Delta$ مجموعه‌ی حالات را در نظر می‌گیریم. رابطه‌ی توجیه‌پذیری را به صورت اجتماع مجزای $\leq_a \sqcup \leq_a{}'$ رابطه‌های جزئی، تابع پیش‌شرط را به عنوان اجتماع مجزای $Pre \sqcup Pre'$ دو تابع پیش‌شرط در نظر می‌گیریم.
اگر $\Gamma \subseteq \Sigma$ و $\Lambda \subseteq \Delta$ رویه‌های باور به روی دو مدل فوق باشند اجتماع آنها به روی مدل $\Sigma \sqcup \Delta$ توسط اجتماع مجزای $\Gamma \sqcup \Delta$ از مجموعه‌ی کنش‌های دو رویه بیان می‌شود.

قضیه ۲.۲.۳. *اگر $i_1 : \Sigma \to \Sigma \sqcup \Delta$ و $i_2 : \Delta \to \Sigma \sqcup \Delta$ دو تابع کانونی باشند، آنوقت دو عبارت زیر معادل هستند.*

- $s \xrightarrow[\mathbf{S}]{\Gamma\sqcup\Delta} s'$؛
- t *چنان موجود است که* $s \xrightarrow[\mathbf{S}]{\Gamma} t$ *و* $i_1(t) = s'$ *باشد در غیر این صورت* $s \xrightarrow[\mathbf{S}]{\Delta} t$ *و* $i_2(t) = s'$.

اثبات. ر.ک.[۲۱]. ∎

اجتماع دلخواه $\bigsqcup_i \Gamma_i$ نیز به صورت مشابه قابل تعریف است همچنین حالت مکرر نیز ($\Gamma^* := \bigsqcup_i \Gamma_i$ ($\Gamma^0 = !\top$، $\Gamma^{i+1} = \Gamma; \Gamma^i$) قابل تعریف است.

[۱۸] Non-deterministic choice

۷.۲.۳ قوانین تغییر باور پویا

قوانین تغییر باور پویا اصلی‌ترین روابط بررسی باور به صورت پویا هستند. به کمک این قواعد می توان باورهای آینده را از باورهای گذشته با توجه به اتفاقات و رخدادهایی که برای باور رخ می‌دهد استخراج کرد. به عبارت دیگر برای محاسبه‌ی $[\Gamma]\mathbf{P}$ می‌توان آنها را به فرمول وجهی $[\Gamma']\mathbf{P}'$ چنان تقلیل داد که P' یا Γ' پیچیدگی کمتری داشته باشند.

عبارتی که می‌آید نشان خواهد داد که چگونه می‌توان با توجه به تعریف $[\Gamma]\mathbf{P}$ رویه‌های غیر قطعی را بر اساس رویه‌های قطعی بیان کرد.

قانون تحلیل قطعیت. برای هر رویه‌ی $\Gamma \subseteq \Sigma$ عبارت زیر را داریم.

$$[\Gamma]\mathbf{P} = \bigwedge\nolimits_{\gamma\in\Gamma}[\gamma]\mathbf{P}.$$

بنابراین رابطه‌ی سایر قوانین‌مان را برای کنش‌های پایه‌ی Σ بیان می‌کنیم.

قانون دانش-کنش. برای هر کنش $\sigma \in \Sigma$، عبارت زیر برقرار است.

$$[\sigma]K_a\mathbf{P} = pre_\sigma \to \bigwedge\nolimits_{\sigma' \sim \sigma}K_a[\sigma']\mathbf{P}.$$

این رابطه بیان می‌کند یک گزاره‌ی $\mathbf{P}$ بعد از یک رویداد برای باورمان دانسته خواهد شد اگر و تنها اگر هرگاه امکان رخداد این رویداد وجود داشته باشد، آنگاه دانسته شود که $\mathbf{P}$ درست است پس از هر رویدادی که از این رویداد تمایز پذیر نیست.

قانون دانش- باور متقن. برای هر $\sigma \in \Sigma$ عبارت زیر بدست می‌آید.

$$[\sigma]\,\Box_a\mathbf{P} = pre_\sigma \to \bigwedge\nolimits_{\sigma' <_a \sigma}K_a[\sigma']\mathbf{P} \wedge \bigwedge\nolimits_{\sigma'' \cong_a \sigma}\Box_a[\sigma'']\mathbf{P}.$$

این رابطه به طور شهودی نشان‌دهنده‌ی رابطه‌ی بهنگام‌کردن کنشی‌مقدم است. یک گزاره‌ی $\mathbf{P}$ به طور متقن پس از یک رویداد مربوط به باور، باور خواهد شد اگر و تنها اگر هرگاه امکان رخداد این رویداد وجود داشته باشد آنگاه

دانسته شود که $\mathbf{P}$ پس از تمام رویدادهایی که توجیه‌پذیرتر هستند، درست است. همچنین بطور متقن $\mathbf{P}$ پس از هر رویدادی که از این رویداد تمایزپذیر نیست باورخواهد شد.

چون دانش و باور متقن را به عنوان نمادهای اصلی منطق ایستای K □ تعریف کردیم، دو معادله‌ی بالا معادلات اصلی نظریه‌ی تغییر باور پویا خواهند بود. اما به عنوان نتیجه می‌توانیم برای باور (شرطی) نیز قانونی بدست بیاوریم. در حقیقت با توجه به تعریفی که از باور بوسیله‌ی باور متقن □ و دانش K بیان کردیم این قانون بدست می‌آید.

قانون باور شرطی-کنش. برای هر کنش $\sigma \in \Sigma$ عبارت زیر را داریم.

$$[\sigma]B_a{}^{\mathbf{P}}\mathbf{Q} = pre_\sigma \to \bigvee_{\Gamma\subseteq\Sigma} \left(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma}\hat{K}_a \langle\gamma\rangle\mathbf{P} \wedge \bigwedge_{\gamma'\notin\Gamma}\neg\hat{K}_a \langle\gamma'\rangle\mathbf{P} \wedge B_a{}^{<\sigma_a{}^{\Gamma}>\mathbf{P}}[\sigma_a{}^{\Gamma}]\mathbf{Q}\right).$$

با کمک این فرمول می‌توانیم باورهای شرطی آینده‌مان را از باورهای شرطی گذشته‌مان بدست آوریم. برای تشریح کردن معنای این قانون، این قانون را به صورت زیر برای $s \in \mathbf{S}$ و $\sigma \in \Sigma$ بازنویسی می‌کنیم.

$s \vDash [\sigma]B_a{}^{\mathbf{P}}\mathbf{Q}$ اگر و تنها اگر

$s \vDash Pre_\sigma \to B_a{}^{<\sigma_a{}^{\Gamma}>\mathbf{P}}[\sigma_a{}^{\Gamma}]\mathbf{Q}$ در حالیکه $\Gamma = \left\{\gamma \in \Sigma : s \vDash_{\mathbf{S}} \hat{K}_a \langle\gamma\rangle\mathbf{P}\right\}$.

به‌راحتی قابل بررسی است که حالت موضعی (وابسته به یک حالت و یا یک جهان ممکن) قانون تحویل‌پذیری با حالت اصلی آن (سرتاسری، ناوابسته به جهانی ممکن) یکسان هستند. مجموعه‌ی Γ دربردارنده‌ی اطلاعات اضافی در مورد کنش حاضر که برای کنشگر در حالت s و پس‌شرط $\mathbf{P}$ داده شده است می‌باشد؛ درحالیکه $\sigma^{\Gamma}{}_a$ نمایش متنی پس‌شرط کنش مفروض است، بدین معنی که نمایش‌دهنده‌ی راه‌های مختلفی است که این کنش تحت اطلاعات اضافی Γ برای کنشگر به نظر می‌رسد. در حقیقت یک کنش در یک حالت موضعی s متفاوت با حالت سرتاسری است. اطلاعاتی که توسط کنشگر در s بدست می‌آید به اجبار نقیض کنش‌های مشخصی را آشکار می‌کند. بنابراین اطلاعت موجب تغییر باور کنشگر نسبت به کنش‌هایی می‌شوند که در واقع توسط باورهای متنی بدست می‌آیند. علاوه‌براین در حضور اطلاعات اضافه‌ی (پس‌شرط $\mathbf{P}$) این نمایش می‌بایستی دوباره تغییر کند. " پس‌شرط نمایش متنی" نتیجه‌ی همین دوبار تغییر است، بدین معنی که باورهای کنشگر در مورد کنش σ به

ازای اطلاعاتی است که به کنشگر با توجه به حالت s و پس‌شرط $\mathbf{P}$ داده می‌شود. این اطلاعات توسط مجموعه‌ی $\Gamma = \left\{\gamma \in \Sigma : s \vDash \mathbf{s}\hat{K}_a \langle\gamma\rangle\mathbf{P}\right\}$ از کنش‌های مجاز داده می‌شود، که نشان‌دهنده‌ی کنش‌هایی است که به طور شناختی برای کنشگر (در s) ممکن به نظر می‌رسد که انجام دهد و پس‌شرط $\mathbf{P}$ را دریافت کند. "نمایش متنی پس‌شرط" ${\sigma^{\Gamma}}_a$ کنش σ نظریه‌ی تغییر کرده‌ی کنشگر در مورد σ از تغییر توسط اطلاعات مربوط Γ است. بنابراین قوانین بالا بیان می‌کنند که باور شرطی آینده‌ی کنشگر $[\sigma]{B_a}^{\mathbf{P}}$، با فرض اینکه کنش σ رخ خواهد داد، توسط باور شرط کنونی او $[{\sigma_a}^{\Gamma}]{B_a}^{<{\sigma_a}^{\Gamma}>\mathbf{P}}$ در مورد اینکه پس‌نمایش کنش ${\sigma^{\Gamma}}_a$ (که در متن داده شده و با اطلاعاتی که توسط پس‌شرط $\mathbf{P}$ داده شده) قابل پیش‌بینی است، باورهای شرطی شده بر اساس اطلاعات ($< {\sigma^{\Gamma}}_a > \mathbf{P}$) که نمایش کنش ${\sigma^{\Gamma}}_a$ منجر به اجرای پس‌شرط $\mathbf{P}$ می‌شود.

حالت ویژه. به عنوان حالت ویژه قانون باور شرطی-کنش می‌توانیم تمامی قوانینی که ون‌بن‌تم معرفی کرده است را برای رویدادهای $\mathbf{P}!$، $\mathbf{P}\Uparrow$ و $\mathbf{P}\uparrow$ بدست آوریم.

$$[!\mathbf{P}]{B_a}^{\mathbf{Q}}\mathbf{R} = \mathbf{P} \to {B_a}^{\mathbf{P}\wedge[!\mathbf{P}]\mathbf{Q}}[!\mathbf{P}]\mathbf{R}.$$

$$[\Uparrow\mathbf{P}]{B_a}^{\mathbf{Q}}\mathbf{R} = ({\hat{K}_a}^{\mathbf{P}}[\Uparrow\mathbf{P}]\mathbf{Q} \wedge {B_a}^{\mathbf{P}\wedge[\Uparrow\mathbf{P}]\mathbf{Q}}[\Uparrow\mathbf{P}]\mathbf{R}) \vee (\neg{\hat{K}_a}^{\mathbf{P}}[\Uparrow\mathbf{P}]\mathbf{Q} \wedge {B_a}^{[\Uparrow\mathbf{P}]\mathbf{Q}}[\Uparrow\mathbf{P}]\mathbf{R}).$$

$$[\uparrow\mathbf{P}]{B_a}^{\mathbf{Q}}\mathbf{R} = ({\hat{B}_a}^{\mathbf{P}}[\uparrow\mathbf{P}]\mathbf{Q} \wedge {B_a}^{\mathbf{P}\wedge[\uparrow\mathbf{P}]\mathbf{Q}}[\uparrow\mathbf{P}]\mathbf{R}) \vee (\neg{\hat{B}_a}^{\mathbf{P}}[\uparrow\mathbf{P}]\mathbf{Q} \wedge {B_a}^{[\uparrow\mathbf{P}]\mathbf{Q}}[\uparrow\mathbf{P}]\mathbf{R}).$$

معادلات زیر را داریم.

$${K_a}^{\mathbf{P}}\mathbf{Q} := K_a(\mathbf{P} \to \mathbf{Q}), \qquad {\hat{K}_a}^{\mathbf{P}} := \neg{K_a}^{\mathbf{P}}\neg Q, \qquad {\hat{B}_a}^{\mathbf{P}}\mathbf{Q} := \neg{B_a}^{\mathbf{P}}\neg Q.$$

قوانینی برای سایر عملگرهای باور. عملگر همانی توجیه‌پذیری (توجیه‌پذیری برابر) به صورت پویا بسیار شبیه دانش است. همچنین عملگر توجیه‌پذیری مستقیم مشابه باور متقن رفتار می‌کند.

$$[\sigma][\cong_a]\mathbf{P} = pre_{\sigma} \to \bigwedge_{\sigma' \cong_a \sigma}[\cong_a][\sigma']\mathbf{P}.$$

$$[\sigma][>_a]\mathbf{P} = pre_\sigma \to \bigwedge_{\sigma' <_a \sigma} K_a[\sigma']\mathbf{P} \wedge \bigwedge_{\sigma'' \cong_a \sigma} [>_a][\sigma'']\mathbf{P}.$$

۸.۲.۳ منطق کنش‌های باور

مسئله‌ی پیدا کردن یک نحو برای مدل‌های کنشی توسط چندین نفر و به شیوه‌های مختلف بیان شده است. در این پایان‌نامه از روشی که توسط بالتاگ و دیگران در [۴، ۵] که بر اساس نشانه ها است، استفاده می‌کنیم. این منطق را منطق کنش‌های باور[۱۹] می‌نامیم.

تعریف ۱.۳ (نشان)**.** یک نشان[۲۰] باور کنشی یک قاب توجیه‌پذیر متناهی Σ به همراه یک مجموعه‌ی مرتب شده‌ی بدون تکرار $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ از اعضای Σ است. هر یک از عناصر Σ را یک نوع کنش می‌نامیم. یک نوع σ را بدیهی می‌گوییم اگر در لیست بالا موجود نباشد.

مثال ۱۳. نشان آگاهی‌بخشی عمومی "سخت[۲۱]" یک قاب تنها شامل یک نوع کنش ! است. رابطه‌ی آن رابطه‌ی همانی است و لیست آن به صورت (!) است.

نشان آگاهی‌بخشی عمومی"نرم[۲۲]" یک قاب شامل دو نقطه به همراه نوع کنش $\Uparrow$ و $\Downarrow$ به همراه رابطه‌ی $\Uparrow\ >_a \Downarrow$ برای کنشگر a و لیست $(\Downarrow, \Uparrow)$ است. به همین شکل می‌توان نشان آگاهی‌بخشی خصوصی کامل، آگاهی‌بخشی خصوصی " بازی جوانمردانه"، ترجیح سازنده و... را بدست آورد. همانطور که در ادامه خواهیم دید برای "دروغ (عمومی) موفقیت آمیز" هیچ نشانی وجود ندارد، در واقع کنش دروغگویی عمومی تحت هر نوع از آگاهی‌بخشی خصوصی نرم از بین خواهد رفت. بنابراین آنها توسط یک نشان بدست می آیند.

زبان. برای هر نشان کنش $(\Sigma, (\sigma_1, ..., \sigma_n))$، زبان $L(\Sigma)$ شامل یک مجموعه از جملات φ و برنامه‌ها به طور همزمان به صورت بازگشتی به قرار زیر است.

---

[۱۹] The logic of doxastic actions
[۲۰] Signature
[۲۱] HardPub
[۲۲] SoftPub

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \mathbf{K}_a\varphi \mid \Box_a \varphi \mid [\pi]\varphi.$$

$$\pi := \sigma\varphi_1 ... \varphi_n \mid \pi \sqcup \pi \mid \pi ; \pi.$$

که در آن $p \in \Phi$، $a \in \mathcal{A}$، $\sigma \in \Sigma$ و $\sigma\varphi_1...\varphi_n$ بیانگر یک n -جمله‌ای که در آن n برابر طول $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ است.

مدل‌های کنشی نحوی. فرم‌های $\sigma\vec{\varphi}$ بیانگر رویه‌های پایه هستند. رابطه‌ی جزئی روی Σ به طور طبیعی یک رابطه‌ی جزئی روی رویه‌های پایه‌ی $L(\mathbf{\Sigma})$ تعریف می‌کند.

$\sigma\vec{\psi} \leq_a \sigma\vec{\varphi}$ اگر و تنها اگر $\sigma' \leq_a \sigma$ و $\vec{\varphi} = \vec{\psi}$.

با توجه به این لیست داده شده می‌توان پیش‌شرط‌های نحوی را به رویه‌ها بصورت $Pre_{\sigma_i\vec{\varphi}} := \varphi_i$ و $Pre_{\sigma\vec{\varphi}} := \top$ (جمله‌ی همواره درست) اگر σ در لیست نباشد، نسبت داد. بنابراین رویه‌های پایه‌ی $\sigma\vec{\varphi}$ یک "مدل توجیه‌پذیر نحوی" $\vec{\varphi}$ بوجود می‌آورند، بدین معنی که هر تعبیر داده شده‌ی $\| . \| : L(\mathbf{\Sigma}) \to Prop$ از گزاره‌ها به عنوان گزاره‌های باور می‌تواند هر مدل نحوی را به یک مدل توجیه‌پذیر (معنایی) $\Sigma \, \| \vec{\varphi} \|$ تبدیل کند.

مدل‌های کنشی تولیدشده با یک نشان. برای نشان داده شده‌ی $\mathbf{\Sigma}$، $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ را به عنوان لیست انواع غیر بدیهی و $\vec{\mathbf{P}} = (\mathbf{P}_1, ..., \mathbf{P}_n)$ را به عنوان گزاره‌های باور متناظرشان در نظر بگیرید. مدل کنشی تولید شده توسط نشان Σ و لیست گزاره‌های $\vec{\mathbf{P}}$ یک مدل $\mathbf{\Sigma}\vec{\mathbf{P}}$ است که $\mathbf{\Sigma}$ را به عنوان قاب کنش آن و تابع پیش‌شرط $Pre_{\sigma_i} = \mathbf{P}_i$ برای نوع غیر بدیهی σ_i، $Pre_\sigma = \top$ (گزاره‌ی همواره درست) برای نوع بدیهی σ است.

کنش‌های $\mathbf{\Sigma}\vec{\mathbf{P}}$ را برای تمایز با نوع کنش $\sigma \in \Sigma$ به صورت $\sigma\vec{\mathbf{P}}$ نشان می‌دهیم. به‌راحتی می‌توانیم این ساختار را برای مجموعه‌ی انواع کنش‌ها گسترش دهیم. نشان $\mathbf{\Sigma}$ و لیست $\vec{\mathbf{P}} = (\mathbf{P}_1, ..., \mathbf{P}_n)$ را در نظر بگیرید. هر زیر مجموعه‌ی $\Gamma \subseteq \Sigma$ یک رویه‌ی باور $\Gamma\vec{\mathbf{P}} := \left\{\sigma\vec{\mathbf{P}} : \sigma \in \Sigma\right\} \subseteq \mathbf{\Sigma}\vec{\mathbf{P}}$ تعریف می‌کند.

مثال ۱۴. مدل کنشی آگاهی‌بخشی عمومی سخت $\mathbf{P}!$ تولید شده به شکل $(\mathbf{P})!$ توسط نشان آگاهی‌بخشی عمومی سخت $Hard = \{!\}$ و لیست $(\mathbf{P})$ بدست می‌آید. به طور مشابه مدل کنشی $SoftPub = (\mathbf{P})$ تولید شده

توسط نشان آگاهی‌بخشی عمومی نرم $SoftPub$ و لیست $(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ از دو گزاره‌ی شامل دو کنش $\Uparrow(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ و $\Downarrow(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ با رابطه‌ی $\Downarrow(\mathbf{P},\mathbf{Q}) <_a \Uparrow(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ به همراه $Pre_{\Uparrow(\mathbf{P},\mathbf{Q})} = \mathbf{Q}$ و $Pre_{\Downarrow(\mathbf{P},\mathbf{Q})} = \mathbf{P}$ است.

$$\mathbf{Q} \xrightarrow{a,b,c,\cdots} \mathbf{P}$$

این تعبیر یک اتفاقی را در میان کنشگر ها هنگامی که آگاهی $\mathbf{P}$ را به عنوان یک دانش همگانی اعلام می دارند را نشان می‌دهد. آنها ممکن است اشتباه کنند و شاید آگاهی $\mathbf{Q}$ را دریافت کرده باشند. به هر حال این یک دانش همگانی است که $\mathbf{P}$ یا $\mathbf{Q}$ آگاهی‌بخشی شده است.

دروغ (عمومی) موفق آمیز $Lie\mathbf{P}$ (توسط یک کنشگر بی‌نام، به دروغ آگاهی $\mathbf{P}$ اعلام می‌شود.) می‌تواند به صورت $Lie\mathbf{P} := \Downarrow(\mathbf{P},\neg\mathbf{P})$ بیان شود. آگاهی‌بخشی درست (حقیقی) نیز به صورت $True\mathbf{P} := \Uparrow(\mathbf{P},\neg\mathbf{P})$ بیان می‌شود. نهایتاً آگاهی‌بخشی عمومی نرم (بهنگام‌کردن لغت‌نویسی) $\Uparrow\mathbf{P}$ همانند قبل به صورت اجتماع غیر قطعی $\Uparrow\mathbf{P} := True\mathbf{P} \sqcup Lie\mathbf{P}$ قابل بیان است.

معناشناسی. برای معناشناسی $L(\Sigma)$ به طور همزمان دو تابع تعبیر استقرائی تعریف می‌کنیم. یک تابع هر جمله φ را به گزاره‌ی باور $\| \varphi \| \in Prop$ متناظر می‌کند و تابع دیگر رویه‌ی ترم π را به رویه‌ی باور روی یک قاب توجیه‌پذیر متناظر می‌کند. برای رویه ها، $\| \sigma\vec{\varphi} \|$ کنش $\| \vec{\varphi} \| \sigma$ است (یا به عبارت دقیق‌تر رویه‌ی تنهای $\| \vec{\varphi} \| \sigma$ روی قاب $\| \vec{\varphi} \| \Sigma$) ، $\| \pi \sqcup \pi' \| := \| \pi \| \sqcup \| \pi' \|$ ، $\| \pi;\pi' \| := \| \pi \| ; \| \pi' \|$. برای جملات، گزاره‌ها ی اتمی $\| p \|$ توسط ارزیاب مشخص می شوند، $\| \neg\varphi \| := \neg \| \varphi \|$ ، $\| \varphi\wedge\psi \| := \| \varphi \| \wedge \| \psi \|$ ، $\| K_a\varphi \| := K_a \| \varphi \|$ ، $\| \Box_a\varphi \| := \Box_a \| \varphi \|$ ، $\| [\pi]\varphi \| := [\, \| \pi \| \,] \| \varphi \|$.

دستگاه برهان. علاوه بر اصول و قواعد منطق $\Box K$ منطق $L(\Sigma)$ شامل اصول کاهش‌پذیری زیر است.

$$
\begin{array}{lcl}
[\varphi]p & \longleftrightarrow & Pre_{\alpha} \rightarrow p; \\
[\varphi]\neg\varphi & \longleftrightarrow & Pre_{\alpha} \rightarrow \neg[\alpha]\varphi; \\
[\varphi](\varphi \wedge \psi) & \longleftrightarrow & Pre_{\alpha} \rightarrow [\varphi]\varphi \wedge [\varphi]\psi; \\
[\varphi]K_a\varphi & \longleftrightarrow & Pre_{\alpha} \rightarrow \bigwedge_{\alpha' \sim_a \alpha} K_a[\alpha']\varphi; \\
[\varphi]\Box_a\varphi & \longleftrightarrow & Pre_{\alpha} \rightarrow \bigwedge_{\alpha' <_a \alpha} K_a[\alpha'] \wedge \bigwedge_{\alpha'' \cong_a \alpha} \Box_a[\alpha'']\varphi; \\
[\pi \sqcup \pi'] & \longleftrightarrow & [\pi]\varphi \wedge [\pi']\varphi; \\
[\pi;\pi'] & \longleftrightarrow & [\pi][\pi']\varphi.
\end{array}
$$

که در آن p گزاره‌ی اتمی، π، π' ترم‌های رویه‌ای، α رویه‌های پایه در $L(\Sigma)$ و Pre تابع پیش‌شرط نحوی که تعریف کردیم است. $\sim_a$ ، $<_a$ و $\cong_a$ صورت نحوی تمایزناپذیری شناختی، رابطه‌ی توجیه‌پذیری مستقیم و رابطه‌ی توجیه‌پذیری یکسان به روی رویه های پایه هستند.

قضیه ۳.۲.۳. *برای هر نشان Σ، دستگاه برهان بالا برای منطق پویای $L(\Sigma)$ تمام و تصمیم‌پذیر است. همچنین دارای خاصیت مدل متناهی است. این منطق دارای همان قدرت منطق (ایستا) $\Box K$ برای دانش و باور متقن است.*

اثبات. به ضمیمه رجوع شود. ■

۳.۳ عمل بهنگام‌کردن در مدل‌های باور شرطی

۱.۳.۳ مدل باور شرطی کنشی

یک مدل کنش باور شرطی[۲۳] (یا به اختصار CDAM) Σ یک قاب باور شرطی $(\Sigma, \{\bullet_a{}^{\Pi}\}_{a\in\mathcal{A},\Pi\subseteq\Sigma})$ به همراه یک تابع پیش‌شرط (پیشینی) $pre : \Sigma \to Prop$ (به همان شکل که برای مدل‌های توجیه‌پذیر بیان کردیم.) است. مجموعه‌ی کنش‌های $\Pi \subseteq \Sigma$ به عنوان اطلاعاتی جزئی در مورد یک کنش اصلی (پایه) $\sigma \in \Pi$ یا (معادلاً) به عنوان یک عمل غیر قطعی (یکی از کنش‌های $\sigma \in \Pi$ رخ می‌دهد اما نمی توانیم بگوییم کدام کنش رخ خواهد داد.) است. نمایش شرطی $\sigma_a{}^{\Pi}$ راه‌هایی را که کنش σ برای یک کنشگر با اطلاعات داده شده‌ی (موجه اما نه لزوماً صادق) Π در مورد این کنش نمایان می‌شود را مشخص می‌کند. این بدان معنی است که در یک حالت عادی، اگر پس از رخ دادن کنش σ، به کنشگر گفته شود که یکی از کنش‌های Π رخ خواهد داد، او باور خواهد کرد که یکی از کنش‌های پایه ی $\sigma_a{}^{\Pi}$ رخ خواهد داد. همانند قبل هر مدل توجیه‌پذیر کنشی به طور کانونی یک CDAM -مدل تعریف خواهد کرد. همچنین هر CDAM را می‌توان به صورت یک CDAM کانونی یک مدل توجیه‌پذیر کنشی در نظر گرفت.

۲.۳.۳ استقلال نمایش کنش‌ها از باورهای قبلی

همچنانکه در بخش‌های قبل دیدید باورهای قبلی کنشگر هیچ تأثیری در باورهای کنشگر در مورد کنش‌ها ندارند. در حقیقت نمایش $\sigma_a{}^{\Pi}$ هیچ اطلاعاتی یا ارجاعی در مورد نمایش باور s_a ندارد و هیچ تأثیری از آن نمی‌پذیرد. این ویژگی یک خاصیت بارز این نمایشگرها را نشان می‌دهد، اینکه آنها تنها کنش‌ها را برای کنشگر نمایش می‌دهند. نمایشگرهای کنشی به عنوان حقایق جدیدی برای کنشگر هستند، بگونه‌ای که کنشگر واقعاً باور می‌کند که این‌ها واقعاً رخ خواهند داد (در غیر این صورت آنها واقعا نمایشگر این کنش نیستند.). این باورهای کنشی در همان

[۲۳] Conditional doxastic action model

زمان که کسب شدند تغییر نخواهند کرد. هر تغییری در مورد این باورها پس از گذشت زمان ممکن است. برای مدت زمانی این نمایشگرها نشان‌دهنده‌ی این هستند که کنشگر در مورد آنچه که اتفاق خواهد افتاد چگونه فکر می‌کند در حالی که باورهای قبلی تنها باورهای قبلی هستند. اما این باورهای قبلی خودشان می توانند توسط این کنش (یا به عبارت دقیقتر نمایشگر آن) مشمول تغییر .شوند در واقع کنش‌ها تعریف کننده‌ی تغییر و یا عمل بهنگام‌کردن برای مدل‌های ایستا هستند. به طور مشخصتر کنش‌ها (چون به نظر می رسند.) باورهای کنشگر بهنگام می‌شود. کنش‌های ظاهرشده مشخص کننده‌ی این هستند که کنشگر چگونه بایستی باورهایش را بهنگام کند. بنابراین این نمایشگرهای کنشی به هیچ وجه با باورهای قبلی (تعریف، تأثیرو...) ارتباط ندارند و باورهای قبلی تنها پس از رخداد کنش‌ها ممکن است تغییر کنند. این عدم وابستگی نمایش کنش‌ها از باورها را می توان به عنوان یک اصل عقلانی در نظر گرفت. کنشگرها بایستی باورهای قبلی‌شان را در مقابله با اطلاعات و حقایق جدید تغییر دهند. از طرفی کنشگرهای معقول بنیادگرا نیستند، اگر آنها با رویدادی مغایر (که توسط کنش‌ها بیان شده است.) روبه‌رو شوند به خاطر باورهای قبلی‌شان آنها را رد نخواهند کرد، بلکه باورهای قبلی‌اش را بگونه‌ای تغییر خواهد داد که با این رویدادها هماهنگ باشند. به طور خلاصه کنشگر معقول هرگاه با رویداد جدیدی مواجه می‌شود ذهنش را تغییر می‌دهد، آنها کنشی هایی که برای آنها رخ داده است را قبول می‌کنند و باورهای قبلی‌شان را با آن سازگار می‌سازند.

یک نمایش متنی کنشی[۲۴]**.** در زمینه‌ی تغییر باور یک نکته‌ی لطیف وجود دارد، اسقلالی که در مورد نمایش کنشی از باورها بیان کردیم در مورد دانش کنشگر مطرح نیست. هیچ کنشی را نمی‌توانیم فرض کنیم که از دانش قبلی کنشگر مستقل است. ممکن است حالت s بگونه‌ای باشد که کنشگر a بداند که کنش باور شده‌ی ${\sigma_a}^{\Pi}$ نمی‌تواند در این حالت ممکن رخ دهد. این امر کاملاً ممکن است. حتی در حالاتی که σ رخ می‌دهد و اطلاعات Π درست است. در چنین نقاطی کنشگر اطلاعات نمایشگر ${\sigma_a}^{\Pi}$ را قبول نخواهد کرد. بنابراین دانش‌های قبلی بر نمایش کنشی تأثیر می‌گذارد.

مثال ۱۵ . در مثال دورغ موفقیت‌آمیز که بیان کردیم فرض کنید کنش‌های باب (او راست بگوید یا دروغ بگوید.)

---
[۲۴] An Action's Contextual Appearance

را با $Lie_b\mathbf{P}$ و $True_b\mathbf{P}$ نمایش می‌دهیم. در اینجا می‌خواهیم بیان کنیم که دروغ موفقیت‌آمیز همیشه موفق نیست. در واقع اگر حالت ورودی بگونه‌ای باشد که آلیس هم اکنون می‌داند که $\mathbf{P}$ غلط است دروغ نمی‌تواند موفقیت آمیز باشد. با توجه به آنچه که بیان کردیم نمایش کنشی $Lie_b\mathbf{P}$ نمی‌تواند نمایش پایه‌ی $True_b\mathbf{P}$ باشد. در واقع آلیس نمی‌تواند باور کند که باب راست می‌گوید. نمایش متنی این کنش به صورت $Lie_b\mathbf{P} = (Lie_b\mathbf{P})_a$ است، شنونده می‌داند که سخن‌گو دروغ می‌گوید.

${\sigma_a}^{\Pi}$ را به عنوان یک نمایش (مشروط به Π) پیش‌فرض برای یک کنشگر در نظر می‌گیریم. درنبود هرگونه اطلاعت اضافی (به جز Π)، و (یا) هر زمان که دانش قبلی کنشگر اجازه دهد، که کنشگر a باور کند که ${\sigma_a}^{\Pi}$ رخ خواهد داد. این کنش چگونه می‌تواند ظاهر شود (به طور متنی) در حالی که نمایش پیش‌فرض غیر ممکن دانسته شود. می‌توانیم به این پرسش با تعریف یک نمایش متنی ${\sigma_a}^{s,\Pi}$ شامل کنش σ برای کنشگر a در نقطه‌ی s با اطلاعات داده شده‌ی Π پاسخ می‌دهیم. در واقع نمایش شرطی‌مان را قوی‌تر می‌کنیم. در نقطه‌ی داده شده‌ی $s \in S$، یک کنشگر هم‌اکنون اطلاعاتی در مورد کنش بعدی دارد، بدین معنی که این اطلاعات نمی تواند با دانشش $s(a)$ سازگار باشد. کنشگر a می‌داند که کنش می‌بایستی به مجموعه‌ی $\Sigma_{s(a)} := \{\rho \in \Sigma : s \nvDash_{\mathbf{S}} \neg K_a(\rho)\} = \{\rho \in \Sigma : s(a) \cap pre(\rho)_{\mathbf{S}} \neq \varnothing\}$ متعلق باشد. با قراردادن این اطلاعات در کنار اطلاعات جدید Π، نمایش متنی مناسب با شرطی کردن باور کنشگر نسبت به $\Sigma_{s(a)} \cap \Pi$ بدست می آید.

$${\sigma_a}^{s,\Pi} := {\sigma_a}^{\Sigma_{s(a)} \cap \Pi} = {\sigma_a}^{\{\rho \in \Sigma : s(a) \cap pre(\rho) \neq \varnothing\}}.$$

این نمایشگر متنی به طور کامل باور حقیقی کنشگر درباره‌ی کنش σ در نقطه‌ی s با اطلاعات داده شده‌ی Π را مشخص می‌کند.

۳.۳.۳ تاثیر کنش: تغییر قطعی حالت

کنش‌های پایه‌ی $\sigma \in \Sigma$ را به عنوان کنش‌هایی قطعی (به روی حالت‌ها) تعبیر می‌کنیم. همچنین $\sigma(s)$ حاصل کنش پایه‌ی σ به روی حالت $s \in S$ را به صورت جفت مرتب $\sigma(s) := (s, \sigma)$ نشان می‌دهیم. بنابراین برای مدل داده شده‌ی $\mathbf{S}$ به عنوان حالت‌های ممکن ورودی و مدل کنشی CDAM از کنش‌های ممکن، CDM-

مجموعه‌ی تمام حالت‌های ممکن به عنوان حالت‌های ممکن خروجی، یک زیر مجموعه از مجموعه‌ی حاصل ضربی $S \times \Sigma$ خواهد بود. با توجه به این ساختار می توانیم از پس‌شرط ها صحبت کنیم، شرطهایی که به نوعی حالت‌های خروجی (به طور غیر مشخص) از کنش‌ها را به روی حالت‌های ورودی به عنوان زیر مجموعه‌ی $P \subseteq S \times \Sigma$ محدود می‌کنند. مجموعه‌ی حالت‌های ورودی ممکن از کنش σ که شرط $\mathbf{P}$ را ارضاء می کنند را به صورت زیر نشان می دهیم.

$$\sigma^{-1}(\mathbf{P}) = \{s : \sigma(s) \in P\} = \{s : (s, \sigma) \in \mathbf{P}\}.$$

۴.۳.۳ نمایش پس‌شرطی متنی

گاهی اوقات اطلاعات اضافی که کنشگر کسب می‌کند (یا مسلمات و مفروضاتی که در نظر می گیرد.) تنها به $\Pi \subseteq \Sigma$ از کنش‌های ممکن که رخ می‌دهند معطوف نمی‌شود بلکه به پس‌شرط‌ها نیز مربوط می‌شوند، بدین معنی که کنشگر ممکن است بگوید کنش حاصل $\sigma(s) := (s, \sigma)$ شرط $P \subseteq S \times \Sigma$ را ارضاء می‌کند. بنابراین بایستی باور این فرد را باتوجه به کنش حاضر و متن دانشش و این اطلاعات اضافه به صورت شرطی بیان کنیم. برای این منظور نماد ${\sigma_a}^{s,P}$ برای کنش σ در نقطه‌ی s با مفروضات (پس‌شرط هایی که کنش مفروض می بایستی ارضاء کند.) P را در نظر می‌گیریم:

$${\sigma_a}^{s,P} := {a}^{\{\rho\in\Sigma : s(a)\cap\rho^{-1}(P)\neq\varnothing\}}.$$

مثال ۱۶ (دروغ گفتن دوباره). فرض کنید $Lie_b\mathbf{P}$ کنش دروغ گفتن موفق توسط باب است. همچنین فرض کنید که $\mathbf{P}$ یک حقیقت واقع (ثابت) (که غلط به نظر می رسد، بنابراین پس از دروغ نیز غلط باقی می ماند.) است، اگر حتی در حالت اولیه آلیس نمی دانست که $\mathbf{P}$ غلط بود (چون که دروغ موفقیت‌آمیز بود و نمایش آن برای b پایه‌ی $True_b\mathbf{P}$ است.). او ممکن است این اطلاعات را به عنوان یک پس‌شرط $\neg\mathbf{P}$ دریافت کند. آنگاه شنونده متوجه دروغ خواهد شد. نمایش پس‌شرط متنی از دروغ $(\neg\mathbf{P})$ دروغ است.

۵.۳.۳ تغییر باور تعریف شده توسط کنش و پس‌شرط

تغییر باور کنشگر (درباره‌ی حالت ورودی s) بوسیله‌ی کنش σ زمانی که پس‌شرط $P \subseteq S \times \Sigma$ داده شده باشد را با نماد ${s_a}^{\sigma,P}$ نشان می‌دهیم. این نماد نمایش حالت ورودی s برای کنشگر a پس از کنش σ و پس از اطلاعاتی مبنی بر اینکه حالات خروجی در پس‌شرط **P** صدق می کنند، است. در واقع کنشگر باور قبلی‌اش را نه بر اساس کنش حقیقی بلکه از طریق راه‌هایی که آن کنش به نظر می‌رسد تغییر می‌دهد. همانطور که بیان کردیم نمایش کنش σ در نقطه‌ی s با پس‌شرط P به‌صورت ${\sigma_a}^{s,P}$ است. بنابراین اطلاعات جدیدی که از پس امر واقع بدست آوردیم این است که حالت ورودی s، ${\sigma_a}^{s,P}$ را ارضاء می‌کند. علاوه براین یک حالت خروجی شرط P را ارضاء می‌کند. به عبارت دیگر کنشگر متوجه می‌شود که حالات اولیه‌ی اصلی $({\sigma_a}^{s,P})^{-1}(P)$ است. بنابراین او می‌بایستی باورهای قبلی اش را با این اطلاعات جدید تغییر دهد (شرطی کند).

$${s_a}^{\sigma,P} := {s_a}^{({\sigma_a}^{s,P})^{-1}(P)}.$$

۶.۳.۳ بهنگام‌کردن در CDM

مدل بهنگام‌شده‌ی یک مدل باور شرطی $\mathbf{S}$ به همراه یک مدل باور شرطی کنشی $\mathbf{\Sigma}$ مدل شرطی $\mathbf{S} \otimes \mathbf{\Sigma}$ است که اعضایش به صورت $\sigma(s) := (s,\sigma)$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از $S \otimes \Sigma$ هستند. در اینجا از نماد تابعی $\sigma(s)$ به جای (s,σ) استفاده می‌کنیم. همانند قبل تابع پس‌شرط روی دامنه‌اش عمل می‌کند.

$$S \otimes \Sigma := \{\sigma(s) : s \in pre(\sigma)_{\mathbf{S}}\}.$$

نمایش شرطی (با شرط P) برای فرض (مفروضات، مسلمات) $P \subseteq S \otimes \Sigma$ از حالت خروجی $\sigma(s)$ برای کنشگر a به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\sigma(s)_a{}^P := {\sigma_a}^{s,P}({s_a}^{\sigma,P}) \cap P.$$

عبارت بالا بدین معنی است که باورهای بهنگام‌شده‌ی کنشگر a (در مورد حالت خروجی کنش σ به‌روی حالت s با اطلاعات داده شده‌ی P) $\sigma(s)_a{}^P$ با تأثیر کنشی که باور کرده‌ایم رخ خواهد داد. $\sigma_a{}^{s,P}$ به روی باورهای تغییر کرده کنشگر در مورد حالت ورودی $s_a{}^{\sigma,P}$ (تغییر باوری که توسط $\sigma_a{}^{s,P}$ حاصل شده است.) و تحدیدی با پس‌شرط P بدست می‌آید. همانند مدل‌های توجیه‌پذیر تابع ارزیاب حالت خروجی توسط تابع ارزیاب حالت اولیه تعیین می‌شود.

$$\parallel p \parallel_{\mathbf{S}\otimes\mathbf{\Sigma}} := \{\sigma(s) \in S \otimes \Sigma : s \in \parallel p \parallel_{\mathbf{S}}\}.$$

قضیه ۱.۳.۳. *دو عمل بهنگام‌کردن که تعریف کردیم با هم برابر هستند. مدل کانونی CDM حاصل از بهنگام‌کردن دو مدل توجیه‌پذیر، برابر بهنگام‌کردن مدل‌های کانونی CDM آنها است.*

اثبات. با توجه به قضایای قبلی به‌راحتی بدست می‌آید. ∎

۷.۳.۳ منطق پویا برای منطق باور شرطی کنشی

نمادها، نحو و معناشناسی منطق پویای مدل‌های باور شرطی کنشی مانند منطق توجیه‌پذیر کنشی است. تنها معناشناسی که کافیست بیان کنیم معناشناسی منطق پویای پایه توسط تابع معکوس زیر است.

$$\parallel < \sigma\vec{\varphi} > \psi \parallel_{\mathbf{S}} = (\sigma \parallel \vec{\varphi} \parallel_{\mathbf{S}})^{-1} \parallel \psi \parallel_{\mathbf{S}\otimes\mathbf{\Sigma}\parallel\vec{\varphi}\parallel}.$$

نمادگزاری. برای بیان کردن دستگاه برهان نماد نمایش منطقی پس‌شرط یک کنش را در نحومان بیان می‌کنیم. برای جملات θ ،ψ و رویه‌ی پایه‌ی $\alpha = \sigma\vec{\varphi}$ قرار می دهیم:

$$< \alpha_a{}^\theta > \psi := \bigvee_{\Pi\subseteq\Sigma\vec{\varphi}} \left(< \alpha_a{}^\Pi > \psi \wedge \bigwedge_{\beta\in\Pi} \neg K_a \neg < \beta > \theta \wedge \bigwedge_{\beta'\notin\Pi} K_a \neg < \beta' > \theta\right).$$

درستی این رابطه با مشاهده‌ی این که به طور معناشناختی معادل نمایش متنی پس‌شرط است، بدست می آید.

$$\| < (\sigma\vec{\varphi})_a{}^{\theta} > \psi \| \mathbf{s} = \{s : s \in ((\sigma \| \vec{\varphi} \| \mathbf{s})_a{}^{s,\|\theta\|s})^{-1} \| \psi \| \mathbf{s}_{\otimes \Sigma \|\vec{\varphi}\|}\}.$$

قضیه ۲.۳.۳. ***گزاره.*** *یک دستگاه برهان کامل برای منطق $CDL(\Sigma)$ با اضافه کردن اصول بالا و قواعد CDL به اصول تحویل‌پذیری زیر بدست می‌آید.*

$$
\begin{array}{lll}
< \pi \cup \pi' > \varphi & \longleftrightarrow & < \pi > \varphi \vee < \pi' > \varphi; \\
< \pi; \pi' > \varphi & \longleftrightarrow & < \pi >< \pi' > \varphi; \\
< \alpha > p & \longleftrightarrow & Pre(\alpha) \wedge P; \\
< \alpha > \neg\varphi & \longleftrightarrow & Pre(\alpha) \wedge \neg < \alpha > \varphi; \\
< \alpha > (\varphi \vee \psi) & \longleftrightarrow & < \alpha > \varphi \vee\ < \alpha > \psi; \\
< \alpha > B_a{}^{\theta}\varphi & \longleftrightarrow & Pre(\alpha) \wedge B_a{}^{<\alpha_a{}^{\theta}>\theta}[\alpha_a{}^{\theta}](\theta \to \varphi).
\end{array}
$$

P هرگزاره‌ی اتمی،π ، π' رویه و α یک رویه‌ی پایه در $L(\Sigma)$ است.

اثبات. درستی رابطه‌ی آخر واضح است، برای این منظر تنها کافی است تعریف بهنگام‌کردن در CDM را در حالت s به‌کار ببریم؛

$$\sigma(s)_a{}^{P} := \sigma_a{}^{s,P}(s_a{}^{\sigma,P}) \cap P،$$

و پس از قرار دادن $\alpha =: \sigma$ ، $\| \theta \| =: P$ از معناشناسی عملگر وجهی پویا استفاده کنیم. درستی سایر رابطه‌ها و تمامیت مشابه اثبات قضیه‌ی ۳.۲.۳ است. ■

حالت ویژه. اگر اصل آخر را برای حالت عملگر لوزی بنویسیم عبارت زیر را بدست می‌آوریم.

$$[\alpha]B_a{}^{\theta}\varphi \quad \longleftrightarrow \qquad Pre(\alpha) \to B_a{}^{<\alpha_a{}^{\theta}>\theta}[\alpha_a{}^{\theta}](\theta \to \varphi).$$

به عنوان یک حالت ویژه از قانون باور-شرطی-کنش می‌توانیم قوانین تحلیل‌پذیری برای φ! و ψ $\Uparrow$ را بدست آوریم.

$$[!\psi]B_a{}^{\theta}\varphi = \psi \to B_a{}^{\psi\wedge[!\psi]\theta}[!\psi]\varphi.$$

$$[\Uparrow\psi]B_a{}^{\theta}\varphi = (\hat{K}_a{}^{\psi}[\Uparrow\psi]\theta \wedge B_a{}^{\psi\wedge[!\psi]\theta}[\Uparrow\psi]\varphi) \vee (\neg\hat{K}_a{}^{\psi}[\Uparrow\psi]\theta \wedge B_a{}^{\psi\wedge[\Uparrow\psi]\theta}[\Uparrow\psi]\varphi).$$

$$K_a{}^{\psi}\theta := K_a(\psi \to \theta), \qquad \hat{K}_a{}^{\psi} := \neg K_a{}^{\psi}\neg\theta, \qquad \hat{B}_a{}^{\psi}\theta := \neg B_a{}^{\psi}\neg\theta.$$

۴.۳ یادگیری با فرآیند پرسش و پاسخ

تعریف ۲.۳ (پرسش). یک پرسش یک خانواده‌ی متناهی مجزا از گزاره‌های $Q = \{\mathbf{A}^1, ..., \mathbf{A}^n\}$ است بطوریکه دو اصل زیر را داشته باشیم.

$$\mathbf{A}^i \wedge \mathbf{A}^j = \bot، \bigvee_{i=1,n}\mathbf{A}^{\,i} = \top.$$

هر پرسش $\mathbf{Q}$ یک افراز $\left\{\mathbf{A}^{\,1}\mathbf{s}, ..., \mathbf{A}^{\,n}\mathbf{s}\right\}$ است و هرکدام از $\mathbf{A}^{\,i}$ها یک پاسخ ممکن هستند. پاسخ صحیح به $\mathbf{Q}$ در یک مدل نقطه‌ای $\mathbf{S}$ یک پاسخ صحیح $\mathbf{A}^i$ است (بدین معنی که $\mathbf{S} \vDash \mathbf{A}^{\,i}$).

۱.۴.۳ یادگیری یک پاسخ مطمئن: بهنگام‌شدن

کنشی که در آن کنشگر پاسخ مطمئن و دقیق $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{i}$ را در پاسخ به پرسش $\mathbf{Q}$ یاد می‌گیرد را به صورت $\mathbf{A}!$ نمایش می‌دهیم. این عمل در واقع همان عمل بهنگام‌کردن در منطق شناختی پویا و شرطی در نظریه‌ی تغییر باور است. عمل بهنگام‌کردن $\mathbf{A}!$ قابل اجرا به روی یک مدل نقطه‌ای است اگر و تنها اگر در آن مدل درست باشد ($\mathbf{S} \models \mathbf{A}^{i}$). بنابراین به طور صوری عمل بهنگام‌کردن $\mathbf{A}!$ یک تابع جزئی است که به عنوان ورودی یک مدل نقطه‌ای $\mathbf{S} = (S, \leq, \| \ \|, s_0)$ که $\mathbf{A}$ در آن ارضاء می‌شود را دریافت می‌کند. این عمل یک مدل نقطه‌ای جدید $\mathbf{A}(\mathbf{S}) = (S, \leq, \| \ \|, s_0)!$ را بدین صورت که $S' = \mathbf{A_S}$ و $s \leq' t$ اگر و تنها اگر $s \leq' t; s, t \in S'$ و همچنین $\| p \|' = \| p \| \cap S'$ برای تمام اتم های p و $s_0{}' = s_0$ تعریف می‌کند.

۲.۴.۳ یادگیری اطلاعات غیر دقیق یا نامطمئن: ترفیع

اگر کنشگر اطلاعات نامطمئنی درباره‌ی پاسخ به پرسش $\mathbf{Q}$ دریافت کند. در واقع آن‌چیزی که او یاد گرفته است یک رابطه‌ی جزئی به روی مجموعه‌ی $\mathcal{A} \subseteq \{\mathbf{A}^1, \ldots\ldots \mathbf{A}^n\}$ از مجموعه‌ی تمام جواب‌های ممکن است. این پاسخ را به شکل یک قاب توجیه‌پذیر $(\mathcal{A}, \leq)$ نشان می‌دهیم و آن را ترفیع[۲۵] باور می‌نامیم. جهان‌های این قاب تماماً مجزا هستند. اینها یک نمونه‌ی خاصی از مدل‌های کنشی هستند. ترفیع باور $\alpha = (\mathcal{A}, \leq)$ به روی مدل نقطه‌ای $\mathbf{S}$ قابل اجرا است اگر فصل $\mathcal{A}$ در آن درست باشد ($\mathbf{S} \models \bigvee \mathcal{A}$.) به طور صوری عمل ترفیع α یک تابع جزئی است که به عنوان ورودی یک مدل نقطه‌ای $\mathbf{S} = (S, \leq, \| \ \|, s_0)$ که $\bigvee \mathcal{A}$ در آن ارضاء می‌شود را دریافت می‌کند و یک مدل نقطه‌ای جدید به‌عنوان خروجی $\alpha(\mathbf{S}) = (S, \leq, \| \ \|, s_0)$ بدین صورت که $S' = (\bigvee \mathcal{A})_{\mathbf{S}}$ و $s \leq' t$ اگر و تنها اگر داشته باشیم $s \in \mathbf{A}^{i}$، $t \in \mathbf{A}^{j}$ و $\mathbf{A}^{i} < \mathbf{A}^{j}$ یا در غیر این صورت $s < t; s, t \in \mathbf{A}^{i}$؛ همچنین $\| p \|' = \| p \| \cap S'$ برای تمام اتم‌های p با $s_0{}' = s_0$ تعریف می‌کند. بنابراین این عملگر به این صورت عمل می‌کند که تمام جهان‌هایی که در هیچ کدام از جواب‌ها صدق نمی‌کنند را حذف می‌کند و جهان‌هایی که پاسخ‌های با توجیه‌پذیر بیشتری در آنها صدق می‌کند را از جهان‌هایی که پاسخ‌هایی با توجیه‌پذیری کمتری در آنها صادق است را توجیه‌پذیرتر می‌کند. به راحتی قابل بررسی است که مدل $\alpha(\mathbf{S})$ که بوسیله‌ی ترفیع

---

[۲۵] Upgrade

باور $\alpha = (\mathcal{A}, \leq)$ به روی یک مدل نقطه‌ای بدست می‌آید عمل بهنگام‌کردن ضد لغت‌نویسی $\alpha \otimes \mathbf{S}$ توسط مدل نقطه‌ای $\mathbf{S}$ و مدل کنشی $(\mathcal{A}, \leq)$ است که توسط عمل بهنگام‌کردن کنشی‌مقدم تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۳. یک ترفیع $(\mathcal{A}, \leq)$ را استاندارد گوییم هرگاه رابطه‌ی آن $\leq$ مستقیم باشد یعنی برای هر دو جواب مجزا داشته باشیم $\mathbf{A}^i \nleq \mathbf{A}^j$.

۳.۴.۳ ترفیع تکرار شونده

یک جریان ترفیع[۲۶] α یک دنباله‌ی نامتناهی از ترفیع‌های $(\alpha_n)_{n\in N}$ است. یک جریان ترفیع قابل تعریف در منطق $\mathcal{L}$ است اگر برای هر n تمام پاسخ‌های α_n گزاره هایی باشند که در زبان $\mathcal{L}$ قابل تعریف هستند. یک ترفیع ثابت یک جریان ترفیع به شکل $(\alpha, \alpha, \ldots)$ است که در آن برای تمام $n \in N$ داریم $\alpha_n = \alpha$. هر جریان ترفیع یک تابعی را معرفی می‌کند که هر مدل $\mathbf{S}$ را متناظر با یک دنباله‌ی $\alpha(\mathbf{S}) = (\mathbf{S}_n)$ از دنباله‌ها می‌کند که به طور استقرائی به شکل زیر تعریف می‌شود.

$\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}$ و $\mathbf{S}_{n+1} = \alpha_n(\mathbf{S}_n)$ اگر α_n قابل اجرا به روی $\mathbf{S}_n$ باشد.

می‌گوییم جریان ترفیع α قابل اجرا[۲۷] به روی مدل نقطه‌ای $\mathbf{S}$ است اگر α_n قابل اجرا به روی $\mathbf{S}_n$ باشد (برای تمام $n \in N$). می‌گوییم جریان ترفیع α مدل نقطه‌ای $\mathbf{S}$ را تثبیت[۲۸] می‌کند اگر فرآیند تغییر مدلی که توسط α تعریف می‌شود به یک نقطه‌ی ثابت برسد. وجود داشته باشد $n \in N$ چنان که $\mathbf{S}_n = \mathbf{S}_m$ برای تمام $m > n$.

می‌گوییم که α باورهای کنشگر (باورهای غیر شرطی) را در مدل $\mathbf{S}$ تثبیت می‌کند اگر فرآیند تغییر باور که توسط α به روی مدل نقطه‌ای $\mathbf{S}$ تعریف می‌شود به یک نقطه ی ثابت برسد. بدین معنی که $n \in N$ چنان موجود باشد که $\mathbf{S}_n \models B\mathbf{P}$ اگر و تنها اگر $\mathbf{S}_m \models B\mathbf{P}$ برای تمام $m > n$. این تعریف را به طور مشابه می‌شود برای باورهای شرطی و معرفت نیز می توان بیان کرد.

تعریف ۴.۳ (درستی[۲۹]). یک ترفیع استاندارد $(\mathbf{A}^1, \ldots, \mathbf{A}^n)$ را نسبت به مدل نقطه‌ای $\mathbf{S}$ درست می‌گوییم اگر

[۲۶] Upgrade stream
[۲۷] Executable
[۲۸] Stabilizes
[۲۹] Correctness

توجیه‌پذیرترین پاسخ آن در این مدل درست باشد. بدین معنا که $\mathbf{A}^1$ (موجهترین پاسخ) در جهان واقع درست است $\mathbf{S}_m \models \mathbf{A}^1$.

در ادامه دو قضیه مهم که با توجه به این مفاهیم بدست می آید را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۴.۳. *هر جریان ترفیع دانش فرد را تثبیت می‌کند.*

اثبات. ر.ک.[۹]. ∎

قضیه ۲.۴.۳. *هر جریان درست ترفیع باورهای یک فرد را تثبیت می‌کند.*

اثبات. ر.ک.[۹]. ∎

فصل ۴
نگاه رسته‌ای به منطق شناختی

مدل‌های شناختی و مدل‌های شناختی کنشی دو ساختار اصلی منطق شناختی هستند. در این فصل ما می‌خواهیم به شکلی مجردتر منطق شناختی را مورد مطالعه قرار دهیم. ما یک رسته‌ی جدید با استفاده از مدل‌های شناختی و مدل‌های شناختی کنشی تعریف می‌کنیم. این رسته را رسته‌ی شناختی می‌نامیم. با استفاده از این رسته سعی می‌کنیم مطالعات عمیق‌تری درباره‌ی منطق شناختی داشته باشیم. برای نمونه سعی می‌کنیم به این پرسش پاسخ دهیم که آیا می‌توان یک خوانش زمانی از منطق شناختی داشت. پاسخ مثبت به این پرسش می‌تواند منطق شناختی را بوسیله‌ی همراه کردن منطق شناختی پویا با منطق زمان به ابزار جامعی برای مطالعه‌ی پروتکل‌ها تبدیل کند. در بخش آخر رابطه‌ی رسته‌ی شناختی با یک زیر رسته‌ی فضاهای اندازه‌پذیر را بررسی می‌کنیم و با توجه به نظریه‌ی هم‌جبرها به روی فضاهای اندازه‌پذیر مطالعات گسترده‌تری درباره‌ی منطق شناختی خواهیم داشت. این مطالعات جوابی برای پرسش بیان شده مهیا می‌کند.

۱.۴ یادآوری

تعریف ۱.۴ (مدل شناختی). یک قاب شناختی یک ساختار $(S, \sim)$ است که در آن S یک مجموعه از حالت‌ها و $\sim$ یک رابطه‌ی هم ارزی است. یک مدل شناختی یک قاب شناختی به همراه یک تابع ارزیاب است.

تعریف ۲.۴ (S-گزاره). هر S-گزاره یک زیر مجموعه‌ی $P \subseteq S$ است. می‌گوییم که حالت s-گزاره‌ی P را ارضاء می‌کند اگر و تنها اگر $s \in P$.

تعریف ۳.۴ (گزاره‌ی باور). یک گزاره‌ی باور یک تابع $\mathbf{P}$ می‌باشد که به هر مدل شناختی $\mathbf{S}$ یک S-گزاره‌ی

$\mathbf{P_S} \subseteq S$ را نسبت می‌دهد.

می‌گوییم $\mathbf{P}$ در $s \in \mathbf{S}$ درست است هرگاه عبارت زیر را داشته باشیم.

$s \vDash_{\mathbf{S}} \mathbf{P}$ اگر و تنها اگر $s \in (\mathbf{P})_{\mathbf{S}}$.

تمام گزاره‌های باور را با Prop نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۴ (مدل شناختی کنشی)**.** مدل شناختی کنشی یک قاب شناختی $(\Sigma, \sim)$ به همراه یک تابع پیشینی $pre : \Sigma \longrightarrow Prop$ است که به هر عضو Σ گزاره‌ی باور pre_{σ} را نسبت می‌دهد.

تعابیر. عناصرS نشانگر حالت‌های ممکن یا جهان‌های ممکن هستند. جمله‌های اتمی $p \in \Phi$ حقایق انتیک را بیان می‌کنند که می‌توانند در یک جهان ممکن برقرار باشند یا نباشند. تابع ارزش بیان می‌کند که چه حقایقی در چه جهان‌هایی برقرار هستند. رابطه‌ی تمایزناپذیری $\sim$ نشان‌دهنده‌ی دانش کنشگر است.

تعریف ۵.۴ (عمل بهنگام‌کردن (برای مدل‌های یک کنشگره))**.** فرض کنید که $(S, \sim, \|\,.\,\|)$ یک مدل شناختی یک کنشگره و $(\Sigma, \sim', pre)$ یک مدل شناختی کنشی یک کنشگره است. مدل بهنگام $S \otimes \mathbf{\Sigma}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S \otimes \Sigma := \{(s, \sigma) : s \vDash_{\mathbf{s}} pre(\sigma)\}.$$

همچنین برای $(s, \sigma) \in S \otimes \Sigma$ قرار می‌دهیم.

$(s, \sigma) \vDash p$ اگر و تنها اگر $s \vDash p$.

برای حالت یک کنشگره رابطه‌ی شناختی (هم ارزی) زیر را برای مدل بهنگام‌شده در نظر می‌گیریم.

$(s,\sigma) \sim (s',\sigma')$ اگر و تنها اگر $\sigma \sim' \sigma'$ و $s \sim s'$.

تعریف ۶.۴ (مدل‌های یکریخت). دو مدل شناختی $\mathbf{S} = (S, \sim, \| \,.\, \|)$ و $\mathbf{S}' = (S, \sim', \| \,.\, \|')$ را یکریخت می‌گوییم هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا بین آنها وجود داشته باشد (این تابع را با نماد $f : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}'$ نشان می‌دهیم.) و در دو شرط زیر صدق کند.

۱) برای هر گزاره‌ی (اونتیک) p و حالت ممکن s داشته باشیم: $s \in \| p \|$ اگر و تنها اگر $f(s) \in \| p \|'$.

۲) $s \sim s'$ اگر و تنها اگر $f(s) \sim' f(s')$.

۲.۴ رسته‌ی شناختی

در این بخش با استفاده از مدل‌های شناختی و مدل‌های شناختی کنشی و عمل بهنگام‌کردن رسته‌ی شناختی‌مان را معرفی می‌کنیم. توجه به قضیه‌ی " مدل بهنگام‌شده‌ی یک مدل شناختی با یک مدل شناختی کنشی یک مدل شناختی است " [۸]، قدم اولیه برای تعریف رسته‌ی شناختی است.

۱.۲.۴ رسته‌ی شناختی C

رسته‌ی شناختی C را به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

اشیاء: تمام مدل‌های شناختی یک کنشگره (در حد یکریختی) به طوریکه در شرط زیر صدق کنند.

• برای نقاط s و s' در مدل‌های $\mathbf{S} = (S, \sim, \| \,.\, \|)$ و $\mathbf{S}' = (S, \sim, \| \,.\, \|')$ اگر داشته باشیم: $s \in \| p \|$ اگر و تنها اگر $s' \in \| p \|'$، آنگاه این نقاط گزاره‌های باور یکسانی را ارضاء کنند. یعنی برای هر گزاره‌ی باور $\mathbf{P}$ داشته باشیم: $s \vDash_{\mathbf{S}} \mathbf{P}$ اگر و تنها اگر $s' \vDash_{\mathbf{S}} \mathbf{P}$.

پیکان ها: تمام مدل‌های یک عضوی شناختی کنشی یک کنشگره.

نکته. قبل از بررسی شرایط برقراری رسته برای نشان دادن خوش‌تعریفی رسته نشان می‌دهیم که اگر $\mathbf{S} \cong \mathbf{S}'$ آنگاه برای مدل شناختی کنشی $\mathbf{\Sigma} = (\{\sigma\}, \sim)$ داریم $\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{S} \cong \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{S}'$.

از آنجا که $\mathbf{S} \cong \mathbf{S}'$ بنابراین یکریختی $f: \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}'$ بین این دو رسته وجود دارد. یکریختی زیر را بین مدل $\mathbf{S} \otimes \mathbf{\Sigma}$ و $\mathbf{S}' \otimes \mathbf{\Sigma}$ در نظر می‌گیریم.

$$(s, \sigma) \xrightarrow{g} (f(s), \sigma).$$

با توجه به شرطی که روی اشیاء رسته قرار دادیم s و $f(s)$ گزاره‌های باور یکسانی را ارضاء می‌کنند. در نتیجه g یک یکریختی بین دو مدل مذکور تعریف می‌کند.

بررسی شرایط رسته:

وجود پیکان همانی. برای هر مدل شناختی $\mathbf{S} = (S, \sim)$ مدل شناختی کنشی $\otimes \mathbf{\Sigma}$ را به این گونه تعریف می‌کنیم که قاب آن یک قاب تک عضوی $\left(\{\sigma_*\}, \sim'\right)$ است. تابع pre را به این‌گونه تعریف می‌کنیم که به σ_* گزاره‌ی باور P^* را نسبت می‌دهد. این گزاره‌ی باور هر مدل شناختی را به خودش نسبت می‌دهد.

$pre(\sigma_*) = P^*;$

$P^*_{\mathbf{S}} = S;$

$\otimes \mathbf{\Sigma}(S) := \{(s, \sigma) : s \vDash_{\mathbf{s}} pre(\sigma)\} := \{(s, S) : s \vDash_{\mathbf{s}} P^*_{\mathbf{S}}\} := \{(s, S) : s \in S\} \cong S.$

بر اساس تعریف عمل بهنگام‌کردن رابطه‌ی شناختی $\sim''$ روی مدل جدید به صورت زیر تعریف می‌شود. که با توجه به تعریف رابطه‌اش به همان صورت مدل اولیه است.

$$(s, \sigma_*) \sim'' (s', \sigma_*) \text{ اگر و تنها اگر } \sigma_* \sim' \sigma_* \text{ و } s \sim s'.$$

به این ترتیب داریم $\otimes \Sigma(S) = S'$ که S و S' یکریخت هستند. بنابراین برای هر شیء رسته‌ی C یک همانی تعریف می‌شود.

عمل ترکیب. ترکیب دو پیکان $\otimes \mathbf{\Sigma}_1$ و $\otimes \mathbf{\Sigma}_2$ با توجه به اینکه عمل بهنگام‌کردن یک مدل شناختی با یک مدل شناختی کنشی یک مدل شناختی است، به صورت زیر معنادار است.

$$\otimes \mathbf{\Sigma}_1 \otimes \mathbf{\Sigma}_2 = \otimes \mathbf{\Sigma}_1 (\otimes \mathbf{\Sigma}_2).$$

شرکت‌پذیری. با توجه به نحوه‌ی ساخته شدن مدل بهنگام‌شده داریم:

$$\otimes\,\mathbf{\Sigma}_1\,(\,\otimes\,\mathbf{\Sigma}_2 \otimes \mathbf{\Sigma}_3\,) = \,(\otimes\,\mathbf{\Sigma}_1 \otimes \mathbf{\Sigma}_2\,) \otimes \mathbf{\Sigma}_3.$$

چرا که فرض کنید طرفین بر مدل شناختی S عمل کنند، به عبارت ساده‌ی زیر از هر دو طرف می‌رسیم.

$$\{\,(\,(\,(s,\sigma_3\,),\sigma_2\,),\sigma_1\,) \colon s \vDash pre\sigma_3,\; (s,\sigma_3\,) \vDash pre\sigma_2,\; (\,(s,\sigma_3\,),\sigma_2\,) \vDash pre\sigma_1\,\}.$$

جابه‌جایی با همانی. علاوه بر این برای هر شیء S و مدل شناختی کنشی یک کنشگره $\otimes\,\mathbf{\Sigma}$ داریم:

$$\otimes\,\mathbf{\Sigma} \otimes 1_{\mathbf{S}} = \otimes\, 1_{\mathbf{S}} \otimes \mathbf{\Sigma} = \,\otimes\,\mathbf{\Sigma}.$$

پس با توجه به مطالب بیان شده C یک رسته است.

۲.۲.۴ رسته‌ی شناختی $C_{\|.\|_S}$

حال می‌خواهیم مطالعات رسته‌ای خویش را روی مدل‌های شناختی و مدل‌های شناختی کنشی محدودتر کنیم. مجموعه‌ی S از حالت‌های (شمارا) را در نظر بگیرید که دارای تابع ارزش $\|\ .\ \|_S$ است. رسته‌ی $C_{\|.\|_S}$ که دارای اشیاء و پیکان‌های زیر است را در نظر بگیرید.

اشیاء: تمام مدل‌های شناختی متناهی یک کنشگره با یک سلول اطلاعات (در حد یکریختی) $\mathbf{S} = (S,\ \sim,\ \|\ .\ \|)$

چنان که برای هر $s \in S$ یک $s' \in \mathcal{S}$ چنان موجود است که برای هر p، $s \in \|\ p\ \|$ اگر و تنها اگر $s' \in \|\ p\ \|_S$.

همچنین شرطی که روی مدل‌های اشیاء C در نظر گرفتیم اینجا نیز در نظر می‌گیریم.

پیکان‌ها: تمام مدل‌های یک عضوی شناختی کنشی یک کنشگره.

مشابه اثبات رسته‌ی نخست که ساختیم می توان نشان داد که $C_{\|.\|_S}$ یک رسته است.

تعریف ۷.۴ ($\boldsymbol{\mathcal{S}}$ **).** مدل شناختی $(\mathcal{S},\ \sim,\ \|\ .\ \|_S)$ که در آن هر دو جهان s و t با هم هم ارز هستند را با نماد $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ نشان می‌دهیم.

۳.۲.۴ خواص رسته‌ی شناختی $C_{\|.\|_S}$

تعریف ۸.۴ (برابری دو پیکان). در رسته‌ی $C_{\|.\|_S}$ دو پیکان $\otimes\boldsymbol{\Sigma}_1$ و $\otimes\boldsymbol{\Sigma}_2$ یکسان هستند هرگاه داشته باشیم $\boldsymbol{\mathcal{S}}\otimes\Sigma_1 \cong \boldsymbol{\mathcal{S}}\otimes\Sigma_2$.

خوش‌تعریفی. برای خوش‌تعریفی این تعریف بایستی نشان دهیم که اگر دو پیکان $\otimes\boldsymbol{\Sigma}_1$ و $\otimes\boldsymbol{\Sigma}_2$ با هم برابر باشند آنگاه برای مدل شناختی $\mathbf{S} = (S, \sim, \|\ .\ \|)$ داریم $\mathbf{S}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_1 \cong \mathbf{S}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_2$. از آنجا که $\boldsymbol{\mathcal{S}}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_1 \cong \boldsymbol{\mathcal{S}}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_2$ برقرار است، پس یک یکریختی f بین این دو مدل وجود دارد. حال کافیست تحدید f را به روی S در نظر بگیریم این تحدید با توجه به شرطی که روی اشیاء قرار دادیم (نقاطی که حقایق انتیک یکسانی را بازگو می‌کنند، گزاره‌های باور یکسانی را نیز ارضاء می‌کنند.) و اینکه S یک مجموعه از نقاط متمایز است، یک یکریختی بین دو مدل $\mathbf{S}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_1$ و $\mathbf{S}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_2$ تعریف می‌کند.

نکته. علت این‌گونه تعریف (به طور شهودی) این است که چون تمام اعضای مدل شناختی $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ هم‌ارزند در واقع تنها رفتار پیکان‌ها بیانگر مدل نهایی است.

قضیه ۱.۲.۴. *$\boldsymbol{\mathcal{S}}$ شیء ابتدایی رسته‌ی $C_{\|.\|_S}$ است.*

اثبات. برای هر مدل $\mathbf{S}$ یک پیکان یکتای $f : \boldsymbol{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathbf{S}$ وجود دارد. این پیکان را به شکل زیر می سازیم.
قاب این پیکان یک قاب تک نقطه‌ای $\left(\{\sigma_*\}, \sim'\right)$ است و تابع پیش‌شرط، $pre(\sigma_*) = P$ برای هر مدل شناختی به صورت $\mathbf{P}_{\mathbf{S}'} = \mathbf{S} \cap \mathbf{S}'$ تعریف می‌شود.
توجه کنید که رابطه‌ی هم ارزی $\sim''$ مدل $(\boldsymbol{\mathcal{S}})\otimes\boldsymbol{\Sigma}$ با توجه به تعریف رابطه‌ی مدل بهنگام شده و توجه به اینکه مدل‌های شناختی که در نظر گرفتیم تک سلولی بودند، همان رابطه‌ی هم ارزی مدل اولیه است.

$(s, \sigma_*) \sim'' (s', \sigma_*)$ اگر و تنها اگر $\sigma \sim' \sigma$ و $s \sim s'$.

این مدل با S تحت $s \xrightarrow{f} (s,\sigma_*)$ یکریخت می‌باشد. یکتایی این پیکان نیز با توجه به نحوه‌ی تعریف آن بدیهی است. در نتیجه $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ یک شیء ابتدایی برای رسته‌ی $C_{\|.\|_S}$ است. ■

قضیه ۲.۲.۴. *رسته‌ی $C_{\|.\|_S}$ دارای هم‌حد است.*

اثبات. هم‌مخروط‌های $\{f_i : d_i \longrightarrow \mathbf{S}\}$ را روی دیاگرام D در نظر بگیرید. هم‌مخروط $\{f_i : d_i \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}\}$ یک هم حد برای دیاگرام D است، چرا که برای هم‌مخروط $\{f'_i : d_i \longrightarrow \mathbf{S}'\}$ دقیقاً یک پیکان $f : \boldsymbol{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathbf{S}'$ وجود دارد (به علت شیء ابتدایی بودن $\boldsymbol{\mathcal{S}}$). در ضمن داریم:

$$\forall d_i \in D \quad f \circ f_i = f'_i.$$

چرا که تنها پیکان هم‌مخروط $\{f_i : d_i \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}\}$ پیکان همانی $id : \mathcal{S} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}$ است. در نتیجه رسته‌ی $C^{op}{}_{\|.\|_S}$ کامل است. ■

۴.۲.۴ ارتباط رسته‌ی شناختی با رسته‌ی مجموعه‌ها

این سوال که تعبیر پیکان‌های C^{op} چه است جالب می‌تواند باشد. برای نمونه با استفاده از لم اندا[۱] نتیجه‌ی قابل توجه‌ای به دست می آوریم.

لم ۳.۲.۴ (لم اندا)**.** *فرض کنید C یک رسته موضعاً کوچک باشد. برای هر $c \in C_0$ و هر $F \in (set^{c^{op}})$ یک یکریختی $Hom_{set^{c^{op}}}(\mathcal{Y}c, F) \cong Fc$ موجود است که روی F، C طبیعی است.*

با استفاده از لم اندا زمانی که F تابعگون فراموشکار روی رسته‌ی C^{op} و مدل شناختی $\mathbf{S}$ است، معادله‌ی زیر را داریم.

$$Hom_{set^{c^{op}}}(\mathcal{Y}S, F) \cong FS.$$

[۱] The Yoneda lemma

فضاهای ملموس. می‌دانیم تابعگون نمایش‌پذیر $Home\,(-, S\,)$ تمام حدها را حفظ می‌کند و دارای الحاق چپ F است.

$$F : set \leftrightarrows C^{op}{}_{\|\cdot\|_S} U.$$

طبق قضایای الحاق در نظریه‌ی رسته‌ها معادله‌ی زیر را داریم.

$$Hom_{C^{op}{}_{\|\cdot\|_S}}\left(F\left(A\right), S'\right) \cong Hom_{set}\left(A, Hom\left(S', S\right)\right).$$

این معادله به نوعی نشان‌دهنده‌ی تناظر گردایه‌ی پاسخ‌ها با یک مجموعه‌ی مشخص است. این تناظرها در ساختن توپولوژیها مفید هستند.

۳.۴ معناشناسی منطق زمان خطی با استفاده از نظریه‌ی رسته

رسته های دو دکارتی بسته[۲] مدل‌های رسته‌ای منطق گزاره‌ای شهودی هستند. می‌توانیم این مدل‌ها را برای منطق زمان شهودی توسعه دهیم. در این گسترش رسته‌ی بادبزن را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۹.۴ (تعریف رسته‌ی دو دکارتی بسته BCCC). یک رسته‌ی دو دکارتی بسته یک رسته‌ی C به همراه شئ ابتدایی و انتهایی است. همچنین این رسته ضربها، هم ضرب‌های متناهی و توان اشیاءاش را دارا است.

برای صوری کردن عملگر وجهی زمان $\Box$ و $\Diamond$ مجموعه‌ی زمان T را با یک رابطه‌ی کامل $\leq$ در نظر می‌گیریم. رابطه های $>$ و $<$ به صورت طبیعی تعریف می‌شوند. به طور شهودی $t < t'$ به این معنا است که t' بعد از t است. فرمول $\Box\varphi$ بدین معناست که φ حالا و در تمام زمان های بعد برقرار است و $\Diamond\varphi$ بدین معناست که فرمول φ در یکی از زمان‌های حال یا آینده برقرار است. بنابراین گزاره‌ی $(\Box\varphi)(t)$ متناظر می‌شود با عطف تمام گزاره‌های $\varphi(t')$ که $t < t'$ است. گزاره‌ی $(\Diamond\varphi)(t)$ با فصل چنین گزاره‌هایی مربوط می‌شود.

بنابراین می‌توانیم عملگر های وجهی $\Box$ و $\Diamond$ را به صورت توابع زیر [۵۸] در نظر گرفت.

$$(\Box A)(t) = \prod_{t\leqslant t'} A(t'),\ (\Diamond A)(t) = \coprod_{t\leqslant t'} A(t').$$

[۲] Bicartesian closed categories

می توانیم این توابع را به صورت تابعگون نیز در نظر بگیریم در ادامه تعریف دقیق این تابعگون‌ها را می‌آوریم.

تعریف ۱۰.۴ (رسته‌ی بادبزن[۳] [۵۸]). فرض کنید $(T, \leq)$ یک مجموعه‌ی تماماً مرتب و $\mathcal{C}$ یک BCCC باشد بطوریکه هر خانواده از اشیاءاش که توسط مجموعه‌ی $\{t' \mid t' > t\}$ اندیس‌گذاری شده است دارای ضرب و هم‌ضرب هستند. رسته‌ی ضرب $\mathcal{C}^T$ رسته‌ی بادبزن نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۴ (تابعگون زمان رسته‌ی بادبزن [۵۸]). برای هر رسته‌ی بادبزن $\mathcal{C}^T$، تابعگون‌های زمان $\Box$ و $\Diamond$ چنان تعریف می‌شوند که برای هر پیکان f و هر t روابط زیر برقرار باشند.

$$(\Box f)(t) = \prod_{t \leqslant t'} f(t'),\ (\Diamond f)(t) = \coprod_{t \leqslant t'} f(t').$$

توصیف $\mathcal{C}^T$. اگر $\mathcal{C}$ یک رسته‌ی BCCC باشد، آنگاه $\mathcal{C}^T$ نیز BCCC است. اشیاء رسته‌ی $\mathcal{C}^T$ توابع از T به اشیاء رسته‌ی $\mathcal{C}$ هستند. یک پیکان $f : A \longrightarrow B$ یک تابع است که هر زمان t را به یک پیکان $f(t) : A(t) \longrightarrow B(t)$ متناظر می‌کند. برای فرمول‌های زمان φ و ψ یک برهان $\varphi \vdash \psi$ بدین معنی است که برای تمام زمان‌های t داریم $\varphi(t) \vdash \psi(t)$.

ارتباط با رسته‌ی شناختی نشان دادیم که $C_{\|.\|_S}$ دارای عضو ابتدایی است. همچنین $C^{op}{}_{\|.\|_S}$ یک رسته‌ی کامل است. از طرفی می‌دانیم که: رسته‌ی کوچک C کامل است اگر و تنها اگر هم کامل باشد [۳۱]، بنابراین $C_{\|.\|_S}$ دارای ضرب، هم ضرب، عضو ابتدا و عضو انتها است. پس اگر $C_{\|.\|_S}$ توان‌پذیر باشد آنگاه می‌توانیم یک خوانش زمانی از منطق شناختی پویا ارائه کنیم که برای گسترش منطق شناختی در همکاری با منطق زمان مفید خواهد بود.

مطالعه‌ی استدلال‌های کنشگرها زمانی که به یکدیگر در قالب یک پروتکل پیام می‌دهند در نظریه‌ی اطلاعات،

---
[۳] Fan category

نظریه‌ی علوم کامپیوتر، فلسفه و...جایگاه ویژه‌ای دارد. ما پروتکل ها را به صورت دنباله‌ای از کنش‌های مجاز که به نقاط یک مدل کریپکی تخصیص داده شده‌اند در نظر می‌گیریم. همچنین انتقال پیام را می‌توان به صورت مفهوم بهنگام‌کردن در نظریه‌ی منطق شناختی پویا مدل کرد. منطق شناختی پویا، منطق زمان و منطق شناختی سعی می‌کنند فرآیند تبدیل حالت ورودی به حالت خروجی زمانی که حالت اولیه یک حالت شناختی است را صوری کنند. در واقع این فرآیند بدست آمده یک پروتکل شناختی است. قابل توجه است که منطق شناختی پویا به‌تنهایی برای مطالعه‌ی پروتکل‌ها کافی نیست[۳۴]. می‌توان تعدادی از ساختارهای منطق را برای پروتکل‌ها در [۶۱، ۴۵] یافت. همچنین راه های ترکیب منطق شناختی پویا با منطق شناختی زمان توسط ون‌بن‌تم و سایرین در [۱۵، ۳۳، ۲۰] مورد مطالعه قرار گرفته است. اما مسئله‌ی چگونگی همراهی منطق شناختی پویا و نظریه‌ی پروتکل‌ها به شکل شایسته حل نشده است. ما می‌خواهیم با استفاده از ابزار نظریه‌ی رسته این صوری‌سازی را انجام دهیم. دو راه حل در این مورد ارائه می‌دهیم. اولین راه حل این است که از خود رسته‌ی شناختی یک خوانش زمانی بدست بیاوریم که در بالا به آن پرداختیم. همانطور که بیان شد راه حل اول محدودیت‌هایی به همراه دارد. راه حل دومی که بیان می‌کنیم بسیار جامع‌تر می‌باشد. در راه حل دوم از هم‌جبرها استفاده خواهیم کرد. در ادامه راه حل دوم را بیان خواهیم کرد.

۴.۴ هم‌جبر

نظریه‌ی هم‌جبرها[۴] برای یک تابعگون مشخص به روی رسته‌ی مجموعه‌ها چارچوب مناسبی را برای مطالعه‌ی ساختارها و سیستم‌های انتقال که در نظریه‌ی محاسبات مورد توجه هستند را فراهم می‌کند [۵۴]. تابعگون‌های مورد نظر در اینجا تابعگون‌های چندجمله‌ای هستند. این تابعگون‌ها از تابعگون‌های ثابت و تابعگون همانی Id به وسیله‌ی ضرب $T_1 \times T_2$، هم ضرب $T_1 + T_2$ و توان (با توان ثابت E) T^E بدست می آیند. هم‌جبرها برای تابعگون‌های چندجمله‌ای را می‌توان به‌عنوان گسترشی از اتومات‌های قطعی در نظر گرفت. توان ثابت را می‌توان به عنوان ورودی در نظر گرفت. تابعگون ثابت مجموعه‌ی خروجی و یا نام‌ها را مشخص می‌کند و تابعگون همانی به یک مجموعه از حالت‌ها مربوط است. یک تابعگون چندجمله‌ای کریپکی (KPF) قابل ساختن با عملگر

[۴] Coalgebras

چندجمله‌ای و تابعگون مجموعه‌ی توانی $\mathcal{P}$ است.

زمینه‌ای جدید در این مطالعات توسط موس[۵] و ویگلیزو[۶] در [۴۲، ۶۰، ۴۳] آغاز شده است. آنها رسته‌ی فضاهای اندازه‌پذیر را جایگزین رسته‌ی مجموعه‌ها کردند. آنها تابعگون‌های چندجمله‌ای اندازه‌پذیر را، مشابه تابعگون های KPF که در آن $\triangle$ جایگزین $\mathcal{P}$ شده است مطالعه کردند. تابعگون $\triangle$ هر فضای اندازه‌پذیر $\mathbb{X}$ را به فضای اندازه‌پذیر $\mathbb{X}\triangle$ که نقاط آن اندازه‌های احتمالی هستند نظیر می‌کند. آنها نشان دادند که رسته‌ی هم‌جبرها برای هر تابعگون اندازه‌پذیر چندجمله‌ای دارای یک عضو انتهایی است. این نتیجه‌ی جالبی است که کار آنها را به نظریه بازی در علم اقتصاد مربوط می‌کند. در واقع " فضای انواع جهانی[۷]" که نشانگر کنش باورهای کنشگران است را می‌توان به صورت یک هم‌جبر انتهایی مشاهده کرد[۴۲، ۳۰].

دستگاه برهان برای منطق یک تابعگون چندجمله‌ای کریپکی T در [۳۵، ۵۳] توسعه یافت و مدل‌های کانونی و قضیه‌ی تمامیت برای زمانی که مجموعه‌های ثابت در گیر T ثابت است، بدست آمد. روشی که آنها استفاده کردند چندین دسته‌ای[۸] بود. در واقع این دسته ها توسط اجزاء ترکیبی T که در واقع تابعگون هستند بدست می‌آید. موس و ویگلیزو با استفاده از این سیستم چند دسته‌ای نحو و معناشناسی‌ای برای فضاهای اندازه‌پذیر بیان کردند. روشی که آنها استفاده کردند بیشتر معناشناسانه بود و از نظریه‌ی برهان چندان استفاده نکردند. گلدبلات[۹][۲۵] در ادامه‌ی کار آنها توانست دستگاه برهانی با این نحو و معناشناسی ارائه کند. ما از این معناشناسی و نحو و دستگاه برهان استفاده خواهیم کرد. یکی از تابعگون‌های مورد علاقه ما تابعگون‌های $\Box$ ، $\Diamond$ هستند.

تعریف ۱۲.۴ (فضای اندازه‌پذیر). فرض کنید که $\mathcal{A}$ یک جبر بولی است، یعنی یک مجموعه از زیرمجموعه‌های X چنان که تحت متمم و اجتماع بسته هستند. $\mathcal{A}$ یک σ-جبر است اگر تحت اجتماع شمارا بسته باشد. ساختار $X = (X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر[۱۰] $(Meas)$ و اعضای $\mathcal{A}$ مجموعه های اندازه‌پذیر نامیده می‌شوند.

---

[۵] Moss

[۶] Viglizzo

[۷] Universal type spaces,

[۸] Many sorted

[۹] Goldblatt

[۱۰] Measurable Spaces

تعریف ۱۳.۴ (تابع اندازه‌پذیر). یک تابع اندازه‌پذیر[11] $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (X', \mathcal{A}')$ یک تابع $f : X \longrightarrow X'$ است، بعلاوه اینکه تصویر معکوس هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر است. برای این امر تنها کافی است که برای تمام مجموعه‌های A موجود در یک زمجموعه‌ی تولیدکننده‌ی $\mathcal{A}'$ داشته باشیم $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

۱.۴.۴ رسته‌ی شناختی و رسته‌ی فضاهای اندازه‌پذیر

قضیه ۱.۴.۴. *هر مدل شناختی متناهی می‌تواند یک فضای اندازه‌پذیر و هر مدل شناختی کنشی می‌تواند یک تابع اندازه‌پذیر تعریف کند.*

اثبات. هر مدل شناختی یک قاب شناختی به همراه یک ارزیاب $\mathcal{V} : \Phi \longrightarrow P(M)$ است. می‌توانیم تابع ارزیاب را به عنوان یک مجموعه‌ی ناتهی از زیر مجموعه‌های M به شکل زیر در نظر بگیریم.

$$\mathcal{M} = (M, R, \{X_p\}_{p \in Prop} = \mathcal{A}).$$

$\mathcal{A}$ یک σ-جبر است (M را متناهی در نظر می‌گیریم.)، چرا که یک مجموعه‌ی ناتهی از زیر مجموعه‌های M است که تحت متمم و اجتماع بسته می‌باشد.

$$X_p \cup X_q = X_{p \cup q};$$

$$X^c{}_p = X_{\neg p}.$$

بنابراین هر مدل شناختی متناهی (بدون در نظر گرفتن رابطه‌ی هم ارزی‌اش) یک فضای اندازه‌پذیر تعریف می‌کند. همچنین توجه کنید که می‌توانیم اندازه‌های متفاوتی مانند $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ روی M در نظر بگیریم. برای مثال μ ثابت باشد. در ادامه اندازه‌ای را تعریف می‌کنیم که می‌تواند نشانگر رابطه‌ی توجیه پذیری باشد.

برای مدل شناختی کنشی $(\Sigma, \leq, pre)$، pre یک انتقال $S \otimes \Sigma \longrightarrow S$ به همراه

[11] Measurable function

$\{\, (s,\sigma\,) : s \vDash_{\mathbf{s}} pre\,(\,\sigma\,)\,\} \longrightarrow s$ تعریف می‌کند. به کمک این رابطه یک پیکان در رسته‌ی دوگان C^{op} به شکل زیر می توان تعریف کرد.

$$f : S \otimes \Sigma \longrightarrow S,$$

$$(s,\sigma) \longrightarrow s.$$

$\blacksquare$

حالت ویژه. می توانیم مدل شناختی را همانند یک فضای احتمال به شکل $(\,S,\mu\,)$ در نظر گرفت که در آن S یک مجموعه‌ی متناهی است و $\mu : \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \longrightarrow [\,0,1\,]$ در شرایط زیر صدق می‌کند [۷].

1. $\mu(A \mid A) = 1;$
2. $\mu(A \cup B \mid C) = min(1, \mu(A \mid C) + \mu(B \mid C))$، $A \cap B = \varnothing;$
3. $\mu(A \cap B \mid C) = \mu(A \mid B \cap C).\mu(B \mid C).$

می‌توانیم احتمال شرطی را برای تمام $s,t \in S$ به صورت $(s,t)_\mu = \mu(s \mid \{s,t\})$ در نظر بگیریم.

همچنین به‌راحتی قابل بررسی می‌باشد که هر تابع احتمال $(\bullet,\bullet) : S \times S \longrightarrow [\,0,1\,]$ با اصول زیر به طور یکتا یک فضای احتمال $(\,S,\mu\,)$ تعریف می‌کند.

$$(s,s) = 1\;؛$$

$$s \neq t \qquad (t,s) = 1 - (s,t)\;؛$$

$$(s,t).(t,w)(s,t).(t,w) + (w,t).(t,s) \neq 0 \text{ ، } s \neq w \qquad (s,w) = \frac{(s,t).(t,w)}{(s,t).(t,w)+(w,t).(t,s)}.$$

یک رابطه به شکل زیر می‌توانیم روی نقاط تعریف کنیم.

$s < t$ اگر و تنها اگر $(t,s) = 0$ اگر و تنها اگر $(s,t) = 1$ ، $s \neq t$.

رابطه‌ی شناختی نیز به صورت زیر تعریف می‌شود.

$s \sim t$ اگر و تنها اگر $s < t$ یا $t < s$.

نکته. می‌توانیم اصل ۲ ($A \cap B = \varnothing$، $\mu(A \cup B \mid C) = min(1, \mu(A \mid C) + \mu(B \mid C))$) را برای اندازه‌ی μ به شرط زیر تقلیل دهیم.

$$\mu(A \cup B \mid C) = \mu(A \mid C) + \mu(B \mid C) \le 1، \ A \cap B = \varnothing.$$

۲.۴.۴ رسته‌های اندازه‌پذیر شناختی

همانطور که مشاهده کردید مدل‌های شناختی متناهی می‌توانند یک فضای اندازه‌پذیر و مدل‌های شناختی کنشی می‌توانند یک تابع اندازه‌پذیر تعریف کنند. با توجه به رفتار رسته‌ای مدل‌های شناختی و مدل‌های شناختی کنشی طبیعی به نظر می‌رسد که فضاهای اندازه‌پذیر و توابع اندازه‌پذیر تولید شده توسط مدل‌های شناختی متناهی و مدل‌های شناختی کنشی یک رسته تشکیل دهند. تنها کافی است که اشیاء رسته‌ی C^{op} یعنی مدل‌های کنشی را بدون رابطه‌ی هم ارزی (رابطه ی شناختی) در نظر بگیریم که در واقع یک فضای اندازه‌پذیر است. پیکان‌های این رسته نیز همان مدل‌های یک عضوی شناختی کنشی یک کنشگره هستند که به صورت توابع اندازه‌پذیر رفتار می‌کنند. نماد این رسته را به صورت $\boldsymbol{C}^{op}$ نمایش می دهیم. به طور مشابه می‌توان رسته‌ی $\boldsymbol{C}^{op}{}_{\|.\|_S}$ را تعریف کرد.

قضیه ۲.۴.۴. *رسته‌ی $\boldsymbol{C}^{op}$ ($\boldsymbol{C}^{op}{}_{\|.\|_S}$) یک زیررسته‌ی فضاهای اندازه‌پذیر است.*

اثبات. با توجه به قضایای قبلی بدیهی است. ■

۳.۴.۴ معناشناسی و نحو هم‌جبرهای روی رسته‌ی فضاهای اندازه‌پذیر

تعریف ۱۴.۴ (T-هم‌جبر). برای تابعگون $T : Meas \longrightarrow Meas$ یک T-هم‌جبر یک جفت (X, α) شامل یک فضای اندازه‌پذیر X و یک تابع اندازه‌پذیر $\alpha : X \longrightarrow TX$ است.

تعریف ۱۵.۴ (همریختی T-هم‌جبرها). یک همریختی T-هم‌جبر[۱۲] $f : (X, \alpha) \longrightarrow (X', \alpha')$ توسط یک همریختی-اندازه‌ها $f : X \longrightarrow X'$ تعریف می‌شود، بگونه ای که ساختار انتقال را حفظ کند $\alpha' \circ f = Tf \circ \alpha$.

تعریف ۱۶.۴ (تابعگون چندجمله‌ای اندازه‌پذیر). تابعگون چندجمله‌ای اندازه‌پذیر[۱۳] یک تابعگون روی Meas است. بگونه‌ای که می توان آن را به طور متناهی و مرحله به مرحله توسط تابعگون ثابت و یا تابعگون همانی Id به همراه اعمال ضرب $T_1 \times T_2$، هم‌ضرب $T_1 + T_2$، توان T^E و تابعگون اندازه‌پذیر $\triangle\, T$ ساخت.

گراف چندتایی عناصر

عناصر[۱۴] یک تابعگون چندجمله‌ای اندازه‌پذیر تمام تابعگون هایی هستند که در ساخت T به همراه تابعگون همانی دخیل هستند. $IngT$ را به استقرا به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

- $IngT = \{T, Id\}$ اگر $T = Id$ یا $T = X$.
- $IngT = \{T\} \cup IngT_1 \cup IngT_2$ اگر $T = T_{12}$ یا $T = T_1 + T_2$.
- $IngS = \{T\} \cup IngS$ اگر $T = S^E$ یا $T = \triangle\, S$.

می‌توانیم $IngT$ را در یک گراف چندتایی[۱۵] با نام گذاری یال‌ها به صورت $\xrightarrow{k}$ که در آن $k \in \{pr_1, pr_2, in_1, in_2, eve, next, \geq p\}$ است، تعریف کنیم. p عدد گویای دلخواهی در بازه‌ی $[0, 1]$

---
[۱۲] T-coalgebra morphism
[۱۳] Measurable polynomial functor
[۱۴] Ingredients
[۱۵] Multigraph

است. e عنصری است از یک مجموعه‌ی E که به عنوان یک توان در ساخت T رخ می‌دهد. $p \geq$ احتمال نامیده می‌شود و $1 \geq$ بیشترین اطمینان نامیده می‌شود.

یال‌ها که عناصر T را به هم متصل می کنند به شکل زیر تعریف می‌شوند.

- $S_1 \times S_2 \xrightarrow[T]{in_j} S_j$ و $S_1 + S_2 \xrightarrow[T]{pr_j} S_j$ برای $j \in \{1,2\}$؛
- $S^E \xrightarrow[T]{ev_e} S$ برای تمام $e \in S$؛
- $S \xrightarrow[T]{P} S$ $\triangle$ برای $p \in [0,1]_Q$؛
- $Id \xrightarrow[T]{next} T$.

نحو و معناشناسی

با عناصر T می‌توانیم یک زبان وجهی چنددسته‌ای برای T-هم‌جبر همانند [۳۵، ۵۳] و توسعه یافته ی آن در [۴۲] تعریف کرد. برای $S \xrightarrow{k} S'$ در $IngT$، $[k]$ فرمول‌های ازطبقه‌ی S را از فرمول‌های از طبقه‌ی S' مرتب می‌کند. $\varphi : S$ بدین معنا است که φ فرمولی از طبقه‌ی S است. $Form_S$ نشان‌دهنده‌ی تمام فرمول‌های از طبقه‌ی S است. برای $\Gamma \subseteq Form_S$، $\Gamma : S$ بدین معناست که Γ یک طبقه از S است. $\varphi :: S$ بدین معناست که $\varphi : S$ و هر زیر فرمول φ از طبقه‌ی ثابت یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر هستند. همچنین $\Gamma :: S$ بدین معناست که $\varphi :: S$ برای تمام $\varphi \in \Gamma$.

علامت گذاری. فرض کنید که فضای به شکل $\mathbb{X} = (X, \mathcal{A}_{\mathbb{X}}, \mathcal{A}_{\mathbb{X}^g})$ نشان‌دهنده‌ی یک عنصر ثابت T است و $\mathcal{A}_{\mathbb{X}^g}$ یک تولید کننده‌ی مشخص برای $\mathcal{A}_{\mathbb{X}}$ است.

برای عناصر دلخواه S از T فرمول‌ها به شکل زیر ساخته می‌شوند.

- $\perp_S : S$.
- $A : \mathbb{X}$ اگر $A \in \mathcal{A}^g{}_{\mathbb{X}}$ یا A یک زیر مجموعه‌ی تک عضوی $\mathbb{X}$ باشد.
- اگر $\varphi_1 : S$ و $\varphi_2 : S$ پس $\varphi_1 \longrightarrow \varphi_2 : S$.
- اگر $S \xrightarrow{k} S'$ در $IngT$ به همراه $k \neq (\geq p)$ و $\varphi : S'$، آنگاه $[k]\varphi : S$.

•اگر $S \in IngT$ $\triangle$ و S :: φ آنگاه S $\triangle$: $[\geq p]\varphi$ برای هر $p \in [0,1]_Q$.

هر فرمول $S : \varphi$ در یک T-هم‌جبر (X,α) می‌تواند به عنوان یک زیر مجموعه‌ی $[[\varphi]]_S{}^{\alpha}$ از $S\mathbb{X}$ تعبیر شود. می توانیم آن را به استقراء به شکل زیر تعریف کنیم. نماد گزاری $X \Rightarrow Y = (-X) \cup Y$ را درنظر بگیرید.

$$[[\perp_S]]_{S}{}^{\alpha} = \varnothing;$$

$$[[A]]_{\mathbb{X}'}{}^{\alpha} = A;$$

$$[[\varphi_1 \longrightarrow \varphi_2]]_{S}{}^{\alpha} = [[\varphi_1]]_{S}{}^{\alpha} \longrightarrow [[\varphi_2]]_{S}{}^{\alpha};$$

$$[[\quad [prj]\varphi \quad]]_{S_1 \times S_2}{}^{\alpha} = \pi^{-1}[[\varphi]]_{S_j}{}^{\alpha};$$

$$[[\quad [in_1]\varphi \quad]]_{S_1 + S_2}{}^{\alpha} = in_1([[\varphi]]_{S_1}{}^{\alpha}) \cup in_2(S_2\mathbb{X});$$

$$[[\quad [in_2]\varphi \quad]]_{S_1 + S_2}{}^{\alpha} = in_1(S_1\mathbb{X} \cup in_2([[\varphi]]_{S_2}{}^{\alpha});$$

$$[[\quad [ev_e]\varphi \quad]]_{S^E}{}^{\alpha} = ev_e{}^{-1}[[\varphi]]_{S}{}^{\alpha};$$

$$[[\quad [next]\varphi \quad]]_{Id}{}^{\alpha} = \alpha^{-1}[[\varphi]]_{T}{}^{\alpha};$$

$$[[\quad [\geq P]\varphi \quad]]^{\alpha} = \beta^{p}[[\varphi]]_{S}{}^{\alpha}.$$

معناشناسی کریپکی می‌تواند بوسیله‌ی $\alpha, x \vDash_S \varphi$ به معنای $x \in [[\varphi]]_S{}^{\alpha}$ تعریف شود.

$$\alpha, x \nvDash_S \bot_S;$$

$$\alpha, x \vDash_{\mathbb{X}} S \quad \Leftrightarrow \quad x \in A;$$

$$\alpha, x \vDash_S \varphi_1 \longrightarrow \varphi_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha, x \vDash_S \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha, x \vDash_S \varphi_2);$$

$$\alpha, x \vDash_{S_1 \times S_2} [pr_j]\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha, \pi_j(x) \vDash_{S_j} \varphi;$$

$$\alpha, x \vDash_{S_1 + S_2} [in_j]\varphi \quad \Leftrightarrow \quad (x = in_j(y) \quad \Rightarrow \quad \alpha, y \vDash_{S_j} \varphi);$$

$$\alpha, f \vDash_{S^E} [ev_e]\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha, f(e) \vDash_S \varphi;$$

$$\alpha, x \vDash_{Id} [next]\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha, \alpha(x) \vDash_T \varphi;$$

$$\alpha, \mu \vDash_{\triangle S} [\geq p]\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mu([[\varphi]]_S{}^{\alpha}) \geq p.$$

همچنین برای عملگر $[k]$ می‌توانیم تعریف کنیم.

$\alpha, x \vDash_S [k]\varphi$ اگر و تنها اگر $(xR_k y \quad \Rightarrow \quad \alpha, y \vDash_{S'} \varphi)$.

۴.۴.۴ دستگاه T -استنتاج برای رسته‌ی فضاهای اندازه‌پذیر

اصول مجموعه‌ی $Ax_S \subseteq Form_S$ از S -اصول برای تمام $S \in IngT$ شامل فرمول‌های زیر است.

۱. تمام گزاره های همان‌گوی بولی $S : \varphi$؛

۲. برای $S = \mathbb{X}, A : \mathbb{X}$ و $c \in X$،

$c \in A(a) \quad \{c\} \longrightarrow A$ ،

$c \notin A(a) \quad \neg A \longrightarrow \{c\}$؛

۳. برای $S = S_1 \times S_2, j \in \{1,2\}$ و $\varphi : S_j$،

$[pr_j]\neg\varphi(a) \longrightarrow \neg[pr_j]\varphi$،

$\neg[pr_j] \perp_{S_j}(b)$؛

۴. برای $S = S_1 + S_2$،

$[in_j]\neg\varphi(a) \longrightarrow \neg[in_j]\varphi$،

$[in_2] \perp_{S_2}(b) \longleftrightarrow \neg[in_1] \perp_{S_1}$؛

۵.برای $S = U^E$ و $\varphi : U$،

$[ev_e]\neg\varphi(a) \longrightarrow \neg[ev_e]\varphi$،

$\neg[ev_e] \perp_U(b)$؛

۶. برای $S = Id$ و $\varphi : T$،

$[next]\neg\varphi(a) \longrightarrow \neg[next]\varphi$،

$\neg[next] \perp_T(b)$؛

۷. برای $S = \triangle S$،

$([\geq p]\varphi \longrightarrow [\geq p]\psi)(a) \longrightarrow [\geq 1](\varphi \longrightarrow \psi)$،

$[\geq p]\top_{S'}(b)$،

$p + q > 1(c) \qquad \neg[\geq p]\varphi \longrightarrow [\geq q]\neg\varphi$،

$p + q > 1(d) \qquad [\geq p](\varphi \wedge \psi) \wedge [\geq q](\varphi \wedge \neg\psi) \longrightarrow [\geq p+q]\varphi$،

$p + q > 1(d) \qquad \neg[\geq p]\varphi \wedge \neg[\geq q]\psi \longrightarrow [\geq p+q](\varphi \vee \psi)$.

قضیه ۳.۴.۴. *برای هر $S \in IngT$ تمام S-اصول در تمام T-هم‌جبرها معتبر هستند.*

اثبات. ر.ک.[۲۵]. ■

تعریف ۱۷.۴. • $\Sigma \subseteq_w \Gamma$ بدین معناست Σ یک زیر مجموعه‌ی متناهی از Γ است.

- $\bigwedge_w \Gamma$ مجموعه‌ی $\{\bigwedge \Sigma \mid \Sigma \subseteq_w \Gamma\}$ از عطف تمام زیر مجموعه‌های متناهی Γ است.
- $\psi \longrightarrow \Gamma = \{\psi \longrightarrow \varphi \mid \varphi \in \Gamma\}$.
- برای هر یال $S \xrightarrow{k} S'$ و $\Gamma : S'$، تعریف می‌کنیم S: $[k]\Gamma = \{[k]\varphi \mid \varphi \in \Gamma\}$.

۵.۴.۴ دستگاه استنتاج

فرض کنید که $D = \{\vdash_s \mid S \in IngT\}$ یک مجموعه از رابطه‌های $\vdash_S \subseteq \mathcal{P}(Form_S) \times Form_S$ است.

D یک دستگاه T-استنتاج است اگر تمام بندهای زیر برا ی عناصر S بر قرار باشند.

- قانون فرض: $\varphi \in \Gamma \cup Ax_S$ نتیجه می‌دهد $\Gamma \vdash_S \varphi$.
- حذف تالی: $\{\varphi, \varphi \longrightarrow \psi\} \vdash_S \varphi$.
- قاعده‌ی برش : اگر $\Gamma \vdash_S \psi$ برای تمام $\psi \in \Sigma$ و $\Sigma \vdash_S \varphi$، آنگاه $\Gamma \vdash_S \varphi$.
- قاعده‌ی استنتاج : $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_S \psi$ نتیجه می‌شود $\Gamma \vdash_S \varphi \longrightarrow \psi$.
- قاعده‌ی ثابت : اگر $\mathbb{X} \in IngT$، $\{\neg\{c\} \mid c \in X\} \vdash_{\mathbb{X}} \bot_{\mathbb{X}}$.
- قاعده‌ی ضرورت مربع : برای هر یال $S \xrightarrow{k} S'$ در $IngT$ با k یک ساخت متناهی $\Gamma \vdash_{S'} \psi$ نتیجه می‌شود $[k]\Gamma \vdash_S [k]\psi$.
- قاعده‌ی ارشمیدسی : اگر $\triangle S \in IngT$ ، $\{[\geq p]\varphi \mid p, q\} \vdash_{\triangle S} [\geq p]\varphi$.
- قاعده‌ی‌جمع شمارا : اگر $\triangle S \in IngT$ ، آنگاه برای شمارا $\Gamma :: \varphi$، $\Gamma \vdash_S \psi$ نتیجه می‌دهد: $[\geq p](\bigwedge_w \Gamma) \vdash_{\triangle S} [\geq p]\psi$.

معناشناسی استنتاج رابطه‌ای موضعی و سرتاسری برای $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Forms_S$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma \vDash_S{}^{\alpha}\varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in S\mathbb{X}, \alpha \quad (\alpha, x \vDash_S \Gamma \Rightarrow \alpha, x \vDash_S \varphi);$$

$$\Gamma \vDash_S \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma \vDash_S{}^{\alpha}\varphi \qquad \forall T, \alpha.$$

قضیه ۴.۴.۴. (۱) *برای هر T- هم‌جبر $(\mathbb{X}, \alpha)$، سیستم $Conseq_T{}^{\alpha} = \{\vDash_S{}^{\alpha} \mid S \in IngT\}$ از استنتاج‌های رابطه‌ای موضعی یک دستگاه T- استنتاج است.*

(۲) *سیستم سرتاسری $Conseq_T = \{\vDash_S \mid S \in IngT\}$ یک دستگاه T-استنتاج است.*

اثبات. ر.ک.[۲۵]. ■

۶.۴.۴ نتیجه گیری

نشان دادیم که چگونه می‌توان برای هم‌جبرهای رسته‌ی فضای اندازه‌پذیر یک دستگاه استنتاج معرفی کرد. از طرفی نیز نشان دادیم C^{op} و $C^{op}{}_{\|.\|_S}$ زیر رسته‌ی فضاهای اندازه‌پذیر هستند. حال سؤال طبیعی این است که تحت چه شرایطی می‌توان دستگاه استنتاج برای هم‌جبرهای فضاهای اندازه‌پذیر را برای این زیر رسته نیز به کار برد. از آنجا که این زیر رسته در ضرب و هم ضرب بسته است تنها شرط مورد نیاز این است که تحت تابعگون Δ نیز بسته باشد و این با توجه به اینکه ما هیچ شرطی روی اندازه‌ها قرار ندادیم و اینکه فضاهای اندازه‌پذیر احتمالی نیز در فضاهای اندازه‌پذیر قرار داشتند، بدیهی است. حال به پاسخی برای پرسشی که در اول بخش مطرح کردیم دست یافته‌ایم. کافی است هم‌جبرهای تابعگون‌های $\Box$ و $\Diamond$ را که تابعگون چندجمله‌ای هستند را برای رسته‌های معرفی شده در نظر بگیریم. می‌توانیم یک دستگاه استنتاج برای این هم‌جبرها که یک خوانش زمانی از منطق شناختی بیان می‌کنند را معرفی کنیم.

۷.۴.۴ چشم‌انداز

در مورد چشم‌اندازهای این‌پایان نامه به چند مورد به شرح زیر می‌توان اشاره کرد.

• پس از صوری کردن مفهوم پرسش و پاسخ در منطق شناختی یک چشم‌انداز فصل سوم نحوه‌ی ارتباط نظریه‌ی یادگیری با منطق شناختی است. مدل کردن نظریه‌های مختلف یادگیری به شکل صوری به کمک منطق شناختی یک زمینه‌ی وسیع در این چشم‌انداز است.

• در این فصل بیان کردیم که به چه شکل می‌توان مفهوم زمان خطی را با یک تابعگون بیان کرد. یک سؤال جالب این است که آیا می‌توان شهودهای دیگری که از زمان داریم را به صورت تابعگون‌های دیگری صوری کرد.

• در این فصل ارتباطی بین رسته‌های شناختی و نظریه‌ی مجموعه‌ها پیدا کردیم. یک مطالعه‌ی طبیعی این است که با توجه به این رابطه می‌توان یک توپولوژی مفید برای مفاهیم شناختی بیان کرد.

• همانطور که در این فصل بیان کردیم رسته‌های شناختی ساخته شده دارای ضرب، هم‌ضرب، شئ انتهایی و ابتدایی هستند. به نظر می‌رسد می‌توان یک دستگاه استنتاج بدون نقیض و شرطی به طریق رسته‌های دکارتی بسته برای این رسته‌ها معرفی کرد.

• به نظر می‌رسد می‌توان سیستم نحوی، معناشناسی و دستگاه استنتاجی که در اینجا برای تغییرات شناختی بیان کردیم به عنوان هسته‌ی سیستم‌های استنتاجی که مربوط به تغییرات مختلف هستند، درنظر گرفت. می‌توان تغییرات مدل‌های اجتماعی، مدل‌های کوانتمی و... که با استفاده از مدل‌های ایستا و پویای کریپکی صوری می‌شوند را با این هسته‌ی مرکزی مطالعه کرد.

کتاب‌نامه

[۱] اردشیر، محمد، **منطق ریاضی** ، ویراست دوم، هرمس، تهران: ۱۳۸۹

[۲] شمس، منصور، **آشنایی با معرفت شناسی**، چاپ دوم، طرح نو،تهران:۱۳۸۷

[3] R.J. Aumann. Interactive epistemology I: Knowledge. International Journal of Game Theory, 28(3):263–300, 1999.

[4] A. Baltag, L.S. Moss S. Solecki. The logic of common knowledge, public announcements, and private suspicions. In I. Gilboa, ed., Pro-ceedings of the 7th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK 98), pp. 43–56. 1998.

[5] A. Baltag , L.S. Moss. Logics for epistemic programs. Synthese, 139(2):165–224, 2004.

[6] A. Baltag, S. Smets. Conditional doxastic models: a qualitative approach to dynamic belief revision. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 165:5–21, 2006.

[7] A. Baltag, S. Smets. From conditional probability to the logic of doxastic actions. In D. Samet, ed., Proceedings of the 11th Conference on Theoretical

Aspects of Rationality and Knowledge (TARK), pp. 52–61. UCL Presses Universitaires de Louvain, 2007.

[8] A. Baltag, S. Smets. A qualitative theory of dynamic interactive belief revision. Texts in Logic and Games, 3:9–58, 2008.

[9] A. Baltag and S. Smets. Learning by questions and answers: from belief revision cycles to doxastic fixed points. In Proc. of WOLLIC 2009 LNAI5514,124-134 , 2009.

[10] M. Ben-Air, J.Y. Halpern and A. Pnueli. Deterministic propositional dynamic logic: finite models, complexity, and completeness. Journal of Computer and System Science, 25(3):249–263, 1982.

[11] P. Berman, J.Y. Halpern, and J. Tiuryn. On the power of nondeterminism in dynamic logic. In M. Nielsen and E.M. Schmidt, editors, Automata, Languages and Programming, 9th Colloquium, volume 140 of Lecture Notes in Computer Science, pages 12–16. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[12] J. van Benthem. Semantic parallels in natural language and computation. In H.D. Ebbinghaus, J. Fernandez-Prida, M. Garrido, D. Lascar, and M.R. Artalejo, editors, Logic Colloquium '87 . North-Holland, Amsterdam, 1989.

[13] J.F.A.K. van Benthem. Dynamic logic for belief change. Journal of Applied NonClassical Logics, 17(2) : 129- 155, 2007.

[14] Van Benthem , J. LIU F., Dynamic Logic of Preference Upgrade. Journal of Applied Non-Classical Logic, 17(2) : 157-182, 2007.

[15] Van Benthem, J., Gerbrandy, J., Hoshi, T., Pacuit, E. . Merging frameworks for interaction. Journal of Philosophical Logic, 38, 491–526, 2009.

[16] P. Blackburn, M. de Rijke Y. Venema. Modal Logic. No. 53 in Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[17] O. Board. Dynamic interactive epistemology. Games and Economic Behaviour, 49(1):49–80, 2002.

[18] R. Carnap. Modalities and quantification. The Journal of Symbolic Logic, 11(2):33–64, 1946.

[19] K.M. Chandy and J. Misra. How processes learn. In PODC '85: Proceedings of the fourth annual ACM symposium on Principles of distributed computing, pages 204–214. ACM Press, New York, NY, USA, ISBN 0-89791-168-7. 1985.

[20] Dégremont, C. The Temporal Mind. Observations on the logic of belief change in interactive systems. PhD thesis, ILLC, 2010.

[21] H.P. van Ditmarsch,W. van der Hoek B.P. Kooi. **Dynamic Epistemic Logic**, vol. 337 of Synthese Library. Springer, 2007.

[22] J. Gerbrandy W. Groeneveld. Reasoning about information change. Journal of Logic, Language and Information, 6(2):147–169, 1997.

[23] E. Gettier. Is justified true belief knowledge? Analysis, 23(6):121–123,1963.

[24] R. Goldblatt. Logics of Time and Computation, volume 7 of CSLI Lecture Notes. CSLI Publications, Stanford, second edition, 1992.

[25] R. Goldblatt. Deduction Systems for Coalgebras Over Measurable Spaces Journal of Logic and Computation, Vol. 20, Issue 5, 1069-1100, October 2010.

[26] J.Y. Halpern and J.H. Reif. The propositional dynamic logic of deterministic, well-structured progams. Theoretical Computer Science, 27(1-2):127–165, 1983.

[27] J.Y. Halpern and Y. Moses. Knowledge and common knowledge in a distributed environment. In Proceedings of the 3rd ACM Symposium on Principles of Distributed Computing (PODS), pages 50–61. 1984. A newer version appeared in the Journal of the ACM, vol. 37:3, pp. 549–587, 1990.

[28] D. Harel. Dynamic logic. In D. Gabbay and F. Guenthner, editors, Handbook of Philosophical Logic, volume II, pages 497–604. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1984.

[29] D. Harel, D. Kozen, and J. Tiuryn. Dynamic Logic. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, Foundations of Computing Series, 2000.

[30] Aviad Heifetz and Dov Samet. Topology-free typology of beliefs. Journal of Economic Theory, 82:324–341, 1998.

[31] Adámek, Jiří; Herrlich, Horst; Strecker, George E. **Abstract and Concrete Categories**, John Wiley Sons, ISBN 0-471-60922-6, 1990.

[32] J. Hintikka. Knowledge and Belief. Cornell University Press, Ithaca, NY, 1962.

[33] Hoshi, T. Epistemic Dynamics and Protocol Information. PhD thesis, Stanford University, 2009.

[34] Hoshi, T. Merging DEL and ETL. Journal of Logic, Language and Information, 19(4),413–430, 2010.

[35] Bart Jacobs. Many-sorted coalgebraic modal logic: a model-theoretic study. Theoretical Informatics and Applications, 35:31–59, 2001.

[36] H. Katsuno and A. Mendelzon. On the difference between up dating a knowledge base and revising it. In Proceedings of the Second International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning, pages 387394,1991.

[37] J.-J. Ch. Meyer, W. van der Hoek. **Epistemic Logic for AI and Computer Science.** Cambridge Univ. Press, 1995.

[38] P. Klein. A proposed definition of propositional knowledge. Journal of Philosophy, 68(16):471–482, 1971.

[39] S. Kripke. A completeness theorem in modal logic. Journal of Symbolic Logic,24:1–14, 1959.

[40] K. Lehrer. **Theory of Knowledge**. Routledge, London, 1990.

[41] K. Lehrer T. Paxson, Jr. Knowledge: Undefeated justified true belief. Journal of Philosophy, 66(8):225–237, 1969.

[42] Lawrence S. Moss and Ignacio D. Viglizzo. Harsanyi type spaces and final coalgebras constructed from satisfied theories. Electronic Notes in Theoretical Computer Science,106:279–295, 2004.

[43] Lawrence S. Moss and Ignacio D. Viglizzo. Final coalgebras for functors on measurable spaces. Information and Computation, 204:610–636, 2006.

[44] R. Muskens, J. van Benthem, and A. Visser. Dynamics. In J. van Benthem and A. ter Meulen, editors, Handbook of Logic and Language, chapter 10, pages 587–648. Elsevier, Amsterdam, 1997.

[45] Pacuit, E. Simon, S. Reasoning with protocols under imperfect information. Manuscript, 2010.

[46] R. Parikh and R. Ramanujam. Distributed processing and the logic of knowledge. In Logic of Programs, volume 193 of Lecture Notes in Computer Science, pages 256–268. Springer-Verlag, Berlin, 1985. A newer version appeared in Journal of Logic, Language and Information, vol. 12, pp. 453–467, 2003.

[47] J.A. Plaza. Logics of public communications. In M.L. Emrich, M.S. Pfeifer, M. Hadzikadic, and Z.W. Ras, editors, Proceedings of the 4th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems, pages 201–216. 1989.

[48] V.R. Pratt. A near-optimal method for reasoning about action. Journal of computer and system sciences, 20:231–254, 1980.

[49] F. Ramsey. The Foundations of Mathematics and Other Essays. Kegan Paul, London, 1931.

[50] M. de Rijke. Meeting some neighbours. In J. van Eijck and A. Visser, editors, Logic and infomation pow, pages 170195, Cambridge MA, 1994.

[51] H. Rott. Conditionals and theory change: revisions, expansions, and additions. Synthese, 81(1):91–113, 1989.

[52] H. Rott. Stability, strength and sensitivity: Converting belief into knowledge. Erkenntnis, 61(2–3):469–493, 2004.

[53] Martin R¨oßiger. Coalgebras and modal logic. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 33, 2000.

[54] J.M. Rutten. Universal coalgebra: a theory of systems. Theoretical Computer Science, 249(1):3–80, 2000.

[55] K. Segerberg. Irrevocable belief revision in Dynamic Doxastic Logic. Notre Dame Journal of Formal Logic, 39(3):287–306, 1998.

[56] R. Stalnaker. On logics of knowledge and belief. Philosophical Studies, 128(1):169–199, 2006.

[57] Awodey, Steve . **Category theory.** Second. Oxford Logic Guides. Oxford:Oxford University Press, 2010.

[58] Towards a Common Categorical Semantics for Linear-Time Temporal Logic and Functional Reactive Programming Wolfgang Jeltsch,TTU Kuberneetika Instituut Tallinn, Estonia.

[59] F. Veltman. Defaults in update semantics. Journal of Philosophical Logic, 25:221–226, 1996.

[60] Ignacio D. Viglizzo. Coalgebras on Measurable Spaces. PhD thesis, Indiana University,2005.

[61] Wang, Y. Epistemic Modeling and Protocol Dynamics. PhD thesis, Institute for Logic, Language and Computation, 2010.

[62] G.H. von Wright. An Essay in Modal Logic. North Holland, Amsterdam, 1951.

اثبات تمامیت و درستی منطق باور شرطی

تمامیت

فرض کنید $\mathcal{L}$ زبان منطق CDL و $\mathcal{M}$ گردایه‌ی مدلهای باور شرطی هستند. برای اثبات تمامیت ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۵.۴.۴. *هریک از اصول و قواعد زیر از سیستم برهان CDL بدست می‌آیند.*

(د.ب) $B_a\varphi \Leftrightarrow B^{\top}{}_a\varphi.$

(پ) $(B^{\varphi}{}_a\psi \wedge B^{\varphi}{}_a(\psi \longrightarrow \theta)) \longrightarrow B^{\varphi}{}_a\theta.$

(م.ت.۲) $B_a{}^{\varphi}\psi \longrightarrow \big(B_a{}^{\varphi\wedge\psi}\theta \longleftrightarrow B_a{}^{\varphi}\theta\big).$

(ش.ب) $\varphi \longleftrightarrow \psi \Longrightarrow B_a{}^{\varphi} \longleftrightarrow B_a{}^{\psi}.$

اثبات. با توجه به اصول CDL اثبات قواعد بلا سرراست است. ■

چند تعریف را که مورد نیاز اثبات است را بیان می‌کنیم. برای اصول موضوعه‌ی داده شده‌ی AX می گوییم که فرمول φ AX -سازگار است اگر $\neg\varphi$ در AX اثبات نشود. یک مجموعه‌ی متناهی از فرمول‌ها $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ AX -سازگار است اگر $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k$ AX -سازگار باشد. یک مجموعه‌ی نامتناهی از فرمول‌ها را AX -سازگار گوییم اگر تمام زیر مجموعه‌های متناهی آن AX -سازگار باشند. در آخر فرض کنید دو مجموعه از فرمول‌های S، T به صورت $S \subseteq T \subseteq \mathcal{L}$ داده شده است. می‌گوییم که S یک زیر مجموعه‌ی AX -سازگار ماکسیمال است اگر الف) AX -سازگار باشد. ب) برای تمام φ در T که در S نیست $S \cup \{\varphi\}$ AX -سازگار نباشد.

برای اثبات تمامیت می‌بایستی نشان دهیم که هر فرمولی در $\mathcal{L}$ که نسبت به $\mathcal{M}$ معتبر است در CDL نیز معتبر است. برای این امر کافی است که گزاره‌ی زیر را اثبات کنیم.

$*$ هر فرمول CDL -سازگار در $\mathcal{L}$ نسبت به $\mathcal{M}$ ارضاء شدنی است.

فرض کنید که گزاره‌ی (*) را اثبات کرده باشیم. همچنین فرض کنید که φ در $\mathcal{L}$ یک فرمول معتبر است. اگر φ در CDL معتبر نباشد آنگاه $\neg\neg\varphi$ نیز معتبر نیست. بنابراین بر اساس تعریف $\neg\varphi$ CDL -سازگار است. با توجه به (*) داریم که $\neg\varphi$ نسبت به $\mathcal{M}$ ارضاء شدنی است که با معتبر بودن φ در $\mathcal{M}$ تناقض دارد. قبل از شروع به اثبات علامت‌گذاری‌های زیر را معرفی می‌کنیم.

فرض کنید که $Sub(\phi)$ مجموعه‌ی تمام زیر فرمول‌های φ است. $\psi \in Sub(\phi)$ اگر یکی از دو حالت الف یا ب بر قرار باشد. الف) $\varphi = \phi$. ب) ϕ به شکل $\neg\phi'$، $\phi' \wedge \phi''$، $B_a\phi'$ یا $B_a{}^{\phi'}\phi''$ باشد و داشته باشیم $\psi \in Sub(\phi')$ یا $\psi \in Sub(\phi'')$.

$Sub^{+}(\phi)$ کوچکترین مجموعه‌ی شامل تمام فرمول‌های $Sub(\phi)$ به همرا نقیض و عطف آنها است. در واقع $Sub^{+}(\phi i)$ کوچکترین مجموعه‌ای است که در دو شرط الف و ب صدق می‌کند. الف) اگر $\psi \in Sub(\phi)$ آنگاه $\psi \in Sub^{+}(\phi)$. ب) اگر $\psi, \chi \in Sub^{+}(\phi)$ آنگاه $\neg\psi, \psi \wedge \chi \in Sub^{+}(\phi)$؛ همچنین فرض کنید که $Sub^{++}(\phi)$ شامل تمام فرمول‌های $Sub^{+}(\phi)$ به همراه فرمول‌های به شکل (a) $B_a\psi$ و $B_a{}^{\chi}\psi$، که در آن $\psi, \chi \in Sub^{+}(\phi)$؛ (b) اگر $\xi \in Sub^{+}(\phi)$ و $B_a{}^{\chi}\psi \in Sub^{++}(\phi)$ آنگاه $B_a{}^{\xi}B_a{}^{\chi}\psi \in Sub^{++}(\phi)$ و $B_a{}^{\xi}\neg B_a{}^{\chi}\psi \in Sub^{++}(\phi)$ است.

$Sub^{++}{}_{neg}(\phi)$ را به عنوان کوچکترین مجموعه‌ی شامل $Sub^{++}(\phi)$ به همراه نقیض فرمول‌های آن تعریف می‌کنیم. نهایتاً فرض کنید که $Con(\phi)$ مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های CDL -سازگارماکسیمال $Sub^{++}{}_{neg}(\phi)$ است. به‌راحتی قابل بررسی است که هر زیر مجموعه‌ی CDL -سازگار قابل گسترش به یکی از اعضای $Con(\phi)$ است. همچنین اگر S یکی از اعضای $Con(\phi)$ باشد بایستی در شرایط زیر صدق کند.

- برای هر $\psi \in Sub^{++}(\phi)$ تنها یکی از ψ یا $\neg\psi$ عضو $Sub^{++}(\phi)$ است؛
- اگر $\psi \wedge \chi \in S$ آنگاه $\psi \in S$ و $\chi \in S$؛

- اگر $\psi \vee \chi \in S$ آنگاه $\psi \in S$ یا $\chi \in S$؛
- اگر $\psi \Rightarrow \chi \in S$ و $\psi \in S$ آنگاه $\chi \in S$؛
- اگر $\psi \Leftrightarrow \chi$ آنگاه $\psi \in S$ اگر و تنها اگر $\chi \in S$؛
- اگر $\psi \in Sub^{++}{}_{neg}(\phi)$ و $CDL \vdash \psi$ آنگاه $\psi \in S$.

برای اثبات (*) برای هر ϕ یک مدل ویژه‌ی $M_\phi \in \mathcal{M}$ را می‌سازیم. در M_ϕ متناظر با هر $S \in Con(\phi)$ یک جهان w_S موجود است.

نشان می‌دهیم که برای تمام $\psi \in Sub(\phi)$ داریم: (**) $(M_\phi, w_S) \vDash \psi$ اگر و تنها اگر $\psi \in S$.

درنتیجه یک فرمول در $Sub(\varphi)$ در جهان w_S درست است اگر و تنها اگر آن یکی از فرمول‌های S باشد. برای اثبات (*) این امر کافی است، چراکه اگر φ CDL -سازگار باشد آنوقت آن مشمول در مجموعه‌ی $S \in Con(\varphi)$ است. باتوجه به (**) داریم $(M_\phi, w_S) \vDash \phi$. در نتیجه ϕ نسبت به M ارضاء می‌شود.

برای ساختن M_ϕ نمادگذاری‌های جدیدی تعریف می‌کنیم. قرار دهید $S/B^\phi{}_a = \{\psi \mid B^\phi{}_a \in S\}$، $S/B^\phi{}_a$ مجموعه‌ی تمام گزاره‌هایی است که کنشگر a زمانی که ϕرا یاد می‌گیرد، باور می‌کند.

$M_\phi =< W, \leq, V >$ را به شکل زیر می سازیم.

- $W = \{w_S : S \in Con(\phi)\}$
- $w_T \leq {}_a w_U$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $\psi \in Sub^+(\phi) \cap T \cap U$ بگونه‌ای که $S/B^\psi{}_a \subseteq T$ برای یک $S \in Con(\phi)$.
- تابع ارزیاب V نیز به این‌گونه تعریف می‌شود که برای هر $\psi \in \Phi$ داریم $V(w_S)(\psi) = T$ اگر $\psi \in S$ باشد و $V(w_S)(\psi) = F$ اگر $\psi \notin S$.

(**) را با استقراء به روی ساختار فرمول‌ها اثبات می‌کنیم. فرض کنید که استقراء برای تمام زیرفرمول‌های $\psi \in Sub(\phi)$ برقرار است نشان می دهیم برای ψ نیز برقرار است. در حالتی که ψ یک گزاره‌ی اتمی یا عطف و نقیض آنها است اثبات سرراست است. فرض کنید که ψ به شکل $B_a{}^\chi\zeta$ است. ابتدا طرف اول رابطه را اثبات می‌کنیم. فرض کنید که $\psi \in S$ است. در نتیجه با توجه به تعریف داریم $\zeta \in S/B_a{}^\chi$.

مجموعه‌ی $Min_{\leq_a} s(a) \cap [\chi]_{M_\phi}$ را در نظر بگیرید. اگر این مجموعه تهی باشد طبق تعریف $\vDash$ داریم $(M_\phi, w_S) \vDash B_a{}^\chi \zeta$.

فرض کنید که $w_T \in Min_{\leq_a} s(a) \cap [\chi]_{M_\phi}$ بدین معنی که $w_T \leq_a w_U$ برای تمام $w_U \in Min_{\leq_a} s(a) \cap [\chi]_{M_\phi}$ است. بنابراین وجود دارد $\xi \in Sub^+(\varphi)$ چنان که $S/B^\xi{}_a \subseteq T$. می‌بایستی نشان دهیم که $\zeta \in T$. از آنجا که $S/B^\xi{}_a \subseteq T$ است پس $S/B^\xi{}_a$ یک مجموعه‌ی CDL -سازگار است. این نتیجه می‌دهد که $S/B^\chi{}_a$ نیز یک مجموعه‌ی سازگار است. فرض کنید که این چنین نباشد آنگاه زیر مجموعه‌ی متناهی $F = \{\phi_1, \phi_2, ...\phi_k\} \subseteq S/B^\chi{}_a$ چنان موجود است که $CDL \vdash (\phi_1, \wedge \phi_2 \wedge .... \wedge \phi_k)$. η را به عنوان $\phi_1, \wedge \phi_2 \wedge .... \wedge \phi_k$ در نظر بگیرید. روابط زیر را داریم (در نوشتن قواعد و معادلات استفاده شده قواعد و حقایقی که در منطق گزاره‌ها داریم، به جز قاعده ی رفع تالی را بیان نکرده ایم.).

$1.CDL \vdash \neg\eta;$ (فرض)

$2.CDL \vdash \eta \longrightarrow \xi;$ (رفع تالی،ض.ب،۱)

$3.CDL \vdash B_a{}^{\chi}\eta \longrightarrow B_a{}^{\chi}\xi;$ (رفع تالی،پ،ض.ب،۲)

$4.CDL \vdash B_a{}^{\chi}\xi \longrightarrow (B_a{}^{\chi\wedge\xi}\eta \longleftrightarrow B_a{}^{\chi}\eta);$ (م.ت.۲)

$5.CDL \vdash B_a{}^{\chi}\eta_a{}^{\chi\wedge\xi}\eta;$ (رفع تالی،۳،۴)

$6.CDL \vdash \neg B_a{}^{\xi}\neg\chi \longrightarrow (B_a{}^{\xi\wedge\chi}\eta \longleftrightarrow B_a{}^{\xi}(\chi \longrightarrow \eta));$ (م.ت.۱)

$7.CDL \vdash \neg B_a{}^{\xi}\neg\chi \longrightarrow (B_a{}^{\chi\wedge\xi}\eta \longleftrightarrow B_a{}^{\xi}(\chi \longrightarrow \eta));$ (رفع تالی،م.ت.۱ ، ۶)

$8.CDL \vdash (\chi \longrightarrow \eta) \longrightarrow \neg\chi;$ (رفع تالی،۱)

$9.CDL \vdash B_a{}^{\xi}(\chi \longrightarrow \eta) \longrightarrow B_a{}^{\xi}\neg\chi;$ (رفع تالی،پ،ض.ب،۸)

$10.CDL \vdash (B_a{}^{\xi}(\eta) \wedge \neg B_a{}^{\xi}\neg\chi) \longrightarrow B_a{}^{\xi}\eta;$ (رفع تالی،۵،۷،۹)

$11.CDL \vdash (B_a{}^{\xi}(\phi_1) \wedge ... \wedge B_a{}^{\xi}(\phi_k)\neg B_a{}^{\xi}\neg\chi) \longrightarrow (B_a{}^{\xi}\phi_1 \wedge ... \wedge B_a{}^{\xi}\phi_k).$
(رفع تالی،پ،۱۰)

با توجه به فرض استقرا داریم که $\chi \in T$، چرا که $w_T \in [\chi]_{M_\phi}$ و با توجه به اینکه $B_a{}^{\xi}\neg\chi \in Sub^{++}(\phi)$ داریم $\neg B_a{}^{\xi}\neg\chi \in S$. از آنجایی که $B_a{}^{\chi}\phi_1, ..., B_a{}^{\chi}\phi_k \in S$ داریم $\neg B_a{}^{\xi}\phi_1, ..., \neg B_a{}^{\xi}\phi_k \notin S$ در غیر این صورت بنابر خط ۱۱، S می‌بایستی ناسازگار باشد. چون $B_a{}^{\xi}\phi_1, ..., B_a{}^{\xi}\phi_k \in Sub^{++}(\phi)$ نتیجه می‌شود که $B_a{}^{\xi}\phi_1, ..., B_a{}^{\xi}\phi_k \in S$ بنابراین داریم $F \subseteq S/B^{\xi}{}_a$. در نتیجه $S/B^{\xi}{}_a$ سازگار نیست که این خلاف فرض‌مان است.

بنابراین $S/B^{\chi}{}_a$ یک مجموعه‌ی سازگار است. بنابراین دارای گسترش U است و از آنجا که $B^{\chi}{}_a\chi \in S$ داریم که $\chi \in (S/B^{\chi}{}_a) \subseteq U$. بنابراین با توجه به این ساختار $w_T \leq {}_a w_U$ همچنین چون $w_T \in Min_{\leq_a} s(a) \cap [\chi]_{M_\phi}$ داریم $w_U \leq {}_a w_T$. بنابراین با توجه به تعریف داریم $\rho \in Sub^{+}(\phi) \cap T \cap U$

بگونه‌ای که $S/B^{\rho}{}_a \subseteq T$ ما کار را با فرض $B^{\chi}{}_a\xi \in S$ شروع کردیم و همچنین می‌دانیم که $\neg B^{\chi}{}_a\neg\rho \in S$ چرا که $\rho \in U$ و $S/B^{\chi}{}_a \in S$. همچنین داریم که $\neg B^{\rho}{}_a\neg\chi \in S$ چرا که $\chi \in T$ و $S/B^{\rho}{}_a \subseteq T$، به علاوه روابط زیر را داریم.

$12.CDL \vdash \neg B_a{}^{\chi}\neg\rho \longrightarrow (B_a{}^{\chi\wedge\rho}\zeta \leftrightarrow (B_a{}^{\chi}\zeta \vee B_a{}^{\chi}(\rho \to \zeta)));$ (م.ت.۱)

$13.CDL \vdash (\neg B_a{}^{\chi}\neg\rho \wedge B_a{}^{\chi}\zeta) \longrightarrow B_a{}^{\chi\wedge\rho}\zeta;$ (رفع تالی،۱۲)

$14.CDL \vdash (\neg B_a{}^{\chi}\neg\rho \wedge B_a{}^{\chi}\zeta) \longrightarrow B_a{}^{\rho\wedge\chi}\zeta;$ (رفع تالی،ش،۱۳)

$15.CDL \vdash \neg B_a{}^{\rho}\neg\chi \longrightarrow (B_a{}^{\rho\wedge\chi}\zeta \leftrightarrow (B_a{}^{\rho}\zeta \vee B_a{}^{\rho}(\chi \to \zeta)));$ (م.ت.۱)

$16.CDL \vdash (B_a{}^{\chi}\neg\rho \wedge B_a{}^{\chi}\zeta \wedge \neg B_a{}^{\rho}\neg\chi) \to (B_a{}^{\rho}\zeta \vee B_a{}^{\rho}(\chi \to \zeta)).$ (رفع تالی،۱۵،۱۴)

چون χ، ζ و ρ عضو $Sub^{+}(\phi)$ هستند هر دوی $B_a{}^{\rho}\zeta$ و $B_a{}^{\rho}(\chi \Rightarrow \zeta)$ در $Sub^{++}(\phi)$ هستند. بنابراین یکی از دو حالت $B_a{}^{\rho}\zeta \in S$ یا $B_a{}^{\rho}(\chi \Rightarrow \zeta) \in S$ برقرار است. چرا که اگر داشته باشیم $\neg B_a{}^{\rho}\zeta \in S$ و $\neg B_a{}^{\rho}(\chi \Rightarrow \zeta) \in S$ مطابق خط ۱۶، S ناسازگار است. اما داریم $S/B^{\rho}{}_a \subseteq T$. بنابراین یکی از حالات $\zeta \in T$ یا $\chi \Rightarrow \zeta \in T$ که در هر دو حالت $\zeta \in T$ چرا که $\chi \in T$. بنابراین برای هر $w_T \in Min_{\leq_a}s(a) \cap [\chi]_{M_\phi}$، داریم $\zeta \in T$. بنابراین با توجه به فرض استقراء $(M_\phi, w_T) \vDash \zeta$ با توجه به تعریف $\vDash$ نتیجه می‌شود که $(M_\phi, w) \vDash B_a{}^{\chi}\zeta$.

برای اثبات طرف دیگر رابطه‌ی (**) فرض کنید $(M_\phi, w) \vDash B_a{}^{\chi}\zeta$ نتیجه می‌شود که $(S/B_a{}^{\chi}) \cup \{\neg\zeta\}$ یک مجموعه‌ی CDL -سازگار نیست. اگر این مجموعه سازگار باشد قابل گسترش به یک مجموعه‌ی سازگارماکسیمال T است. حالا $B_a{}^{\chi}\chi \in S$ و بنابراین $\chi \in (S/B_a{}^{\chi}) \subseteq T$. با توجه به نحوه‌ی ساختن مدل داریم $w_T \leq{}_a w_U$ برای تمام U چنان که $\chi \in U$ و (فرض داده شده‌ی) $w_T \in Min_{\leq_a}s(a) \cap [\chi]_{M_\phi}$ همچنین فرض استقراء به ما می‌گوید که $(M_\phi, w_T) \vDash \neg\zeta$ چرا که $\neg\zeta \in T$. با توجه به تعریف $\vDash$ بدست می‌آید که $(M_\phi, w_S) \vDash \neg B_a{}^{\chi}\zeta$ که مخالف فرض اولیه‌مان است. بنابراین مجموعه‌ی $(S/B_a{}^{\chi}) \cup \{\neg\zeta\}$ CDL -ناسازگار است. با توجه به

قواعد CDL نتیجه می‌شود که $B_a{}^{\chi}\zeta \in S$.

بنابراین رابطه را برای ψ به شکل $B_a{}^{\chi}\zeta$ به استقراء نشان دادیم. حالتی که ψ به شکل $B_a{}^{\chi}$ است نیز به راحتی بدست می‌آید. گزاره‌ی $\top \in Sub^{+}(\phi)$ را در نظر بگیرید چون داریم $CDL \vdash B_a\chi \Leftrightarrow B_a{}^{T}\chi$ پس $B_a \in S$ اگر و تنها اگر $B_a{}^{T}\chi \in S$. با توجه به تعریف $\vDash$ نتیجه می‌شود که $(M_\phi, w_T) \vDash T$ برای هر w_T. همچنین با توجه به تعریف داریم که $(M_\phi, w_T) \vDash B_a\chi$ اگر و تنها اگر $(M_\phi, w_T) \vDash B_a{}^{T}\chi$.

نشان دادیم که (**) برای تمام فرمول‌های $\psi \in Sub(\phi)$ برقرار است. برای کامل شدن اثبات تنها کافی است نشان دهیم که $M_\phi \in \mathcal{M}$.

واضح است که W یک مجموعه‌ی خوش‌تعریف از جهان‌های ممکن است و V یک تابع ارزیاب است. می‌بایستی نشان دهیم که $\leq_a$ متعدی است و این رابطه نسبت به $s(a)$ پیوسته، بازتابی و خوش‌ترتیب است. برای بررسی پیوسته بودن رابطه باید نشان دهیم که برای $s, t \in s(a)$ یکی از دو حالت $s \leq_a t$ یا $t \leq_a s$ برقرار است. با توجه به تعریف $s(a)$ و رابطه‌ی $\leq_a$ در مدل ساخته شده بایستی یکی از دو حالت الف یا ب برقرار باشد. (الف) وجود دارد $\psi \in Sub^{+}(\phi)$ چنان که $S/B_a{}^{\psi} \subseteq T$، (ب) وجود دارد $\chi \in Sub^{+}(\phi)$ چنان که $S/B_a{}^{\chi} \subseteq T$.

از آنجایی که S یک مجموعه‌ی ماکسیمال است یکی از دوحالت (a) $B_a{}^{\psi\vee\chi}\neg\psi \in S$، (b) $\neg B_a{}^{\psi\vee\chi}\neg\psi \in S$ برقرار است. ما هر دو حالت را بررسی می‌کنیم. ابتدا حالت (a) $B_a{}^{\psi\vee\chi}\neg\psi \in S$ را بررسی می‌کنیم. داریم که $B_a{}^{\psi\vee\chi}\psi \vee \chi \in S$ و روابط زیر برقرار هستند.

$$17.CDL \vdash (\neg B_a{}^{\psi\vee\chi}\neg\psi \wedge B_a{}^{\psi\vee\chi}(\psi \vee \chi)) \longrightarrow B_a{}^{\psi\vee\chi}\chi; \qquad \text{(ش)}$$

$$18.CDL \vdash B_a{}^{\psi\vee\chi}\chi \longrightarrow (B_a{}^{(\psi\vee\chi)\vee\chi}\zeta \wedge B_a{}^{\psi\vee\chi}\zeta); \qquad \text{(م.ت.۲)}$$

$$19.CDL \vdash ((\psi \vee \chi) \vee \chi) \longleftrightarrow \chi;$$

$$20.CDL \vdash B_a{}^{(\psi\vee\chi)\vee\chi}\zeta \wedge B_a{}^{\chi}\zeta. \qquad \text{(ش.ب،۱۹)}$$

خط ۱۷ نشان می‌دهد که $B_a{}^{\psi\vee\chi}\chi \in S$. بنابراین از خط ۱۸ بدست می‌آید که $B_a{}^{(\psi\vee\chi)\wedge\chi}\zeta \in S$ اگر و

تنها اگر $B_a{}^{\psi\vee\chi}\zeta \in S$، بدین معنی که $S/B_a{}^{\psi\vee\chi} = S/B_a{}^{(\psi\vee\chi)\wedge\chi}$. علاوه‌بر این خط ۲۰ نشان می‌دهد که $S/B_a{}^{(\psi\vee\chi)\wedge\chi} = S/B_a{}^{\chi}$. بنابراین $S/B_a{}^{\chi} = S/B_a{}^{\psi\vee\chi} \subseteq U$. اما $\psi \vee \chi \in T \cap U$. بنابراین $w_T \leq {}_a w_U$.

برای حالت (b) $\neg B_a{}^{\psi\vee\chi}\neg\psi \in S$ چون

$$21. CDL \vdash \neg B_a{}^{\psi\vee\chi}\neg\psi \longrightarrow (B_a{}^{(\psi\vee\chi)\vee\psi}\zeta \leftrightarrow B_a{}^{\psi\vee\chi}(\chi \to \zeta)); \quad \text{(م.ت.۲)}$$

$$22. CDL \vdash B_a{}^{\psi\vee\chi}\zeta \longrightarrow B_a{}^{\psi\vee\chi}(\chi \to \zeta). \quad \text{(رفع تالی،پ،ش.ب)}$$

اگر $B_a{}^{\psi\vee\chi}\zeta \in S$ آنگاه $B_a{}^{\psi\vee\chi}(\chi \Rightarrow \zeta) \in S$ (از خط ۲۲) و $B_a{}^{(\psi\vee\chi)\wedge\chi}\zeta$ (از خط ۲۱) بنابراین $S/B_a{}^{\psi\vee\chi} \subseteq$ $S/B_a{}^{(\psi\vee\chi)\wedge\chi} = S/B_a{}^{\psi} \subseteq T$. اما $\psi \vee \chi \in T \cap U$ بنابراین $w_T \leq {}_a w_U$.

برای نشان دادن خاصیت تعدی فرض کنید که w_T، w_U و w_V در $s(a)$ هستند. همچنین $w_T \leq {}_a w_U$ و $w_U \leq {}_a w_V$. همچنین وجود دارد $\psi \in T \cap U$ چنان که $S/B_a{}^{\psi} \subseteq T$ و وجود دارد $\psi \in U \cap V$ چنان که $S/B_a{}^{\chi} \subseteq U$. از آنجایی که S یک مجموعه‌ی ماکسیمال است یکی از دوحالت (a) $B_a{}^{\psi\vee\chi}\neg\psi \in S$، (b) $\neg B_a{}^{\psi\vee\chi}\neg\psi \in S$ برقرار می‌باشد. ما هر دو حالت را بررسی می‌کنیم.

(a) $B_a{}^{\psi\vee\chi}\neg\psi \in S$ همانطور که در قسمت (a) قسمت قبل نشان دادیم داریم $S/B_a{}^{\chi} = S/B_a{}^{\psi\vee\chi} \subseteq U$ اما $\psi \in U$ که این خلاف فرضمان می‌باشد $B_a{}^{\psi\vee\chi}\neg\psi \in S$.

(b) $\neg B_a{}^{\psi\vee\chi}\neg\psi \in S$ در قسمت (b) بالا نشان دادیم که $S/B_a{}^{\psi\vee\chi} \subseteq S/B_a{}^{(\psi\vee\chi)\wedge\chi} = S/B_a{}^{\psi} \subseteq T$ اما $\psi \vee \chi \in T \cap U \cap V$ بنابراین $w_T \leq {}_a w_V$.

توجه کنید که در این اثبات از $w_T \in s(a)$ استفاده نکردیم که در واقع نشان می‌دهد رابطه‌ی ${}_a \leq$ روی کل دامنه‌ی W متعدی است.

خوش‌ترتیبی ${}_a \leq$ نیز سریعاً از متناهی بودن W بدست می‌آید. برای نشان دادن اینکه W متناهی است کافی است نشان دهیم که $Con(\phi)$ متناهی است، چرا که $\parallel W \parallel = \parallel Con(\phi) \parallel$. واضح است که تعداد زیر مجموعه های CDL -سازگار ماکسیمال $Sub(\phi)$ متناهی است، چرا که مجموعه‌ی $Sub(\phi)$ متناهی است. همچنین هر زیرمجموعه‌ی CDL -سازگار ماکسیمال از $Sub(\phi)$ قابل گسترش به یک زیر مجموعه‌ی

CDL -سازگارماکسیمال از $Sub^{+}(\phi)$ است. فرض کنید که S یک زیرمجموعه‌ی CDL -سازگار ماکسیمال از $Sub(\phi)$ است و $S^{+} \supseteq S$ یک مجموعه‌ی CDL -سازگارماکسیمال $Sub^{+}(\phi)$ است. آنوقت $\psi \in S^{+}$ اگر (a) $\psi \in S$ یا (b) ψ به شکل χ است که $\chi \notin S^{+}$ یا (c) ψ به شکل $\chi \wedge \zeta$ است که χ، $\zeta \in S^{+}$، و اگر هیچ زیرمجموعه‌ی CDL -سازگار ماکسیمال S از $Sub(\phi)$ وجود نداشته باشد که $S^{+} \supseteq S$ آنگاه S^{+} نمی‌تواند یک زیر مجموعه‌ی CDL -سازگارماکسیمال از $Sub^{+}(\phi)$ باشد. بنابراین یک تناظر یک به یک مابین زیرمجموعه های CDL -سازگار ماکسیمال از $Sub(\phi)$ و زیر مجموعه‌های CDL -سازگار ماکسیمال از $Sub^{+}(\phi)$ وجود دارد. با توجه به گزاره‌های اتمی می توان گفت حداکثر $2^{\|Con(\phi)\|}$ فرمول مجزا در $Sub^{+}(\phi)$ وجود دارد، که در واقع متناظر ترکیبات مختلف تابع ارزیاب برای فرمول‌های $Sub(\phi)$ است. اگر ψ و χ به طور منطقی هم ارز باشند $(CDL \vdash \psi \Leftrightarrow \chi)$ و $S^{++}{}_{neg}$ یک زیر مجموعه‌ی CDL -سازگارماکسیمال از $Sub^{++}{}_{neg}(\phi)$ باشد آنگاه داریم $B_a\psi \in S^{++}{}_{neg}$ اگر و تنها اگر $B_a\chi \in S^{++}{}_{neg}$؛ و $B_a{}^{\zeta}\psi \in S^{++}{}_{neg}$ اگر و تنها اگر $B_a{}^{\zeta}\chi \in S^{++}{}_{neg}$؛ $B_a{}^{\psi}\zeta \in S^{++}{}_{neg}$ اگر و تنها اگر $B_a{}^{\chi}\zeta \in S^{++}{}_{neg}$؛ همچنین $B_a{}^{\zeta}B_a{}^{\xi}...B_a{}^{\chi} \in S$ اگر و تنها اگر $B_a{}^{\zeta}B_a{}^{\xi}...B_a{}^{\chi} \in S$.بنابراین هر زیر مجموعه‌ی CDL -سازگارماکسیمال از $Sub^{+}(\phi)$ قابل گسترش به تعداد متناهی زیر مجموعه‌ی CDL -سازگار ماکسیمال $Sub^{++}{}_{neg}(\phi)$ است. بنابراین $Con(\phi)$ یک مجموعه‌ی متناهی است.

برای خاصیت بازتابی فرض کنید که $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ یک مجموعه‌ی شمارا از فرمول‌ها در $Sub(\phi)$ است و برای $S \in Con(\phi)$ قرار دهید $\phi'_1 = \phi_1$ اگر $\phi_1 \in S$ و $\phi'_1 = \neg\phi_1$ اگر $\phi_1 \notin S$. با توجه به استنتاج گزاره‌ای بدست می‌آوریم که بایستی $\phi_1{}' \wedge ... \wedge \phi_n{}' \in S$ و چون $\bot$ $CDL \vdash (\phi_1{}' \wedge ... \wedge \phi_n{}') \Rightarrow \neg B_a{}^{\phi_1{}' \wedge ... \wedge \phi_n{}'}$ داریم که $\neg B_a{}^{\phi_1{}' \wedge ... \wedge \phi_n{}'}\bot \in S$ برای $\bot \in Sub^{+}(\phi)$. نتیجه می‌شود که $S/B_a{}^{\phi_1{}' \wedge ... \wedge \phi_n{}'}$ یک مجموعه‌ی سازگار است، علاوه بر این چون $CDL \vdash B_a{}^{\phi_1{}' \wedge ... \wedge \phi_n{}'}\phi_1{}' \wedge ... \wedge \phi_n{}'$ داریم $\phi_1{}' \wedge ... \wedge \phi_n{}' \in S/B_a{}^{\phi_1{}' \wedge ... \wedge \phi_n{}'}$. حال فرض کنید که $B_a{}^{\phi_1{}' \wedge ... \wedge \phi_n{}'}\psi \in S$ پس $\psi \in S/B_a{}^{\phi_1{}' \wedge ... \wedge \phi_n{}'}$ و $\psi \in Sub^{+}(\phi)$. چون $Sub^{+}(\phi)$ شامل تمامی فرمول‌های $Sub(\phi)$به همراه عطف و نقیض های آنها است پس با توجه به استنتاج گزاره‌ای بدست می‌آوریم که یکی از دو حالت $CDL \vdash (\phi_1{}' \wedge ... \wedge \phi_n{}') \Rightarrow \psi$ یا $CDL \vdash (\phi_1{}' \wedge ... \wedge \phi_n{}') \Rightarrow \neg\psi$ برقرار است. اما

از آنجا که ${S/B_a}^{\phi_1{}'\wedge\ldots\wedge\phi_n{}'}$ سازگار است پس بایستی $CDL \vdash ({\phi_1}' \wedge \ldots \wedge {\phi_n}') \Rightarrow \psi$ و بنابراین $\psi \in S$. در نتیجه ${S/B_a}^{\phi_1{}'\wedge\ldots\wedge\phi_n{}'} \subseteq S$. با توجه به تعریف $\leq_a$ و نتیجه‌ای که بدست آوردیم داریم $w_S \leq_a w_S$.

درستی

برای اثبات درستی روی طول برهان برای φ استقراء می‌زنیم. برای اصل ضرورت باور باید نشان دهیم که $\mathcal{M} \vDash \varphi \Rightarrow\ \vdash {B_a}^{\psi}\varphi$. برای این منظور فرض کنید برای مدل M داریم $M \vDash \varphi$. بنابراین برای هر s داریم $(M, s) \vDash \varphi$. می خواهیم ثابت کنیم که $(M, s) \vDash B^{\varphi}{}_a\varphi$. بنابراین بایستی طبق تعریف برای $s_a{}^{\varphi} = Min_{\leq_a} s(a) \cap [\varphi]$ داشته باشیم $s_a{}^{\varphi} \subseteq [\varphi]$. با توجه به اینکه $s(a) = [\varphi]$ داریم $s_a{}^{\varphi} \subseteq [\varphi]$. برای نرمال بودن نیز باید نشان دهیم $\mathcal{M} \vDash B^{\theta}{}_a(\varphi \longrightarrow \psi) \longrightarrow (B^{\theta}{}_a\varphi \longrightarrow B^{\theta}{}_a\psi)$. فرض کنید داریم $M \vDash B^{\theta}{}_a(\varphi \longrightarrow \psi)$. بنابراین برای هر s، داریم $s_a{}^{\theta} \subseteq [\varphi \rightarrow \psi]$. بایستی نشان دهیم اگر $M \vDash B^{\theta}{}_a\varphi$ باشد داریم $M \vDash B^{\theta}{}_a\psi$. در واقع با توجه به تعاریفی که داشتیم می‌خواهیم بگوییم که اگر $s_a{}^{\theta} \subseteq [\varphi]$ برقرار باشد آنگاه داریم $s_a{}^{\theta} \subseteq [\psi]$، که با توجه به $s_a{}^{\theta} \subseteq [\varphi \rightarrow \psi]$ برقرار است. برای $\mathcal{M} \vDash K_a\varphi \longrightarrow \varphi$ فرض کنید که $(K_a\varphi := {B_a}^{\neg\varphi}\varphi)$ $M \vDash B^{\neg\varphi}{}_a\varphi$ بنابراین $s_a{}^{\neg\varphi} \subseteq [\varphi]$. در نتیجه $[\neg\varphi] = \varnothing$. بنابراین باید داشته باشیم $M \vDash \varphi$. برای $\mathcal{M} \vDash K_a\varphi \longrightarrow {B_a}^{\psi}\varphi$ فرض کنید داشته باشیم $M \vDash K_a\varphi$ بنابراین $s_a{}^{\neg\varphi} \subseteq [\varphi]$. در نتیجه $[\neg\varphi] = \varnothing, [\varphi] = s(a)$. پس $s_a{}^{\theta} \subseteq [\varphi]$. این کافی است برای اینکه $M \vDash B^{\theta}{}_a\varphi$. به اصول درون‌نگری می‌رسیم. برای درون‌نگری مثبت فرض کنید $M \vDash B^{\theta}{}_a\varphi$ در نتیجه داریم $s_a{}^{\theta} \subseteq [\varphi]$. از طرفی برای اینکه ثابت کنیم $M \vDash K_aB^{\theta}{}_a\varphi$ باید نشان دهیم $s(a) \subseteq [B^{\theta}{}_a\varphi]$. فرض کنید $s \in s(a)$ از آنجا که داشتیم $s_a{}^{\theta} \subseteq [\varphi]$ پس $s \in [B^{\theta}{}_a\varphi]$. این کار را تمام می‌کند. اما برای درون‌نگری منفی $M \vDash \neg B^{\theta}{}_a\varphi$ در نتیجه $s_a{}^{\theta} \nsubseteq [\varphi]$. مشابه درون‌نگری مثبت برای اینکه ثابت کنیم $M \vDash K_a\neg B^{\theta}{}_a\varphi$ باید نشان دهیم $s(a) \subseteq [\neg B^{\theta}{}_a\varphi]$. فرض کنید $s \in s(a)$. از آنجا که داشتیم $s_a{}^{\theta} \nsubseteq [\varphi]$. پس $s \in [\neg B^{\theta}{}_a\varphi]$. سرانجام برای اصل مینیمم بودن تغییر فرض کنید $M \vDash \neg B^{\varphi}{}_a\neg\psi$. پس داریم$s_a{}^{\varphi} \nsubseteq [\neg\varphi]$. می بایستی نشان دهیم $(M \vDash B^{\varphi\wedge\psi}{}_a\theta \Leftrightarrow M \vDash B^{\varphi}{}_a(\psi \longrightarrow \theta)$، که با توجه به تعاریف و $s_a{}^{\varphi} \nsubseteq [\neg\varphi]$ بایستی داشته باشیم $(s_a{}^{\varphi\wedge\psi} \subseteq [\theta] \Leftrightarrow s_a{}^{\varphi} \subseteq [\psi \longrightarrow \theta])$، که بررسی آن آسان است.

در مورد تصمیم پذیری و مدل متناهی داشتن به [۱۳] رجوع کنید.

اثبات تمامیت و درستی منطق کنش‌های باور

تمامیت

برای کوتاهی در نوشتار حالتی را فرض کنید که تمام کنش‌ها به صورت مدل‌های نقطه‌ای هستند. یعنی α نشانگر یک مدل یک نقطه‌ای (M,s) است. همچنین زبان ما گسترشی از زبان منطق CDL است و عملگر دانش متقن را دخالت نمی‌دهیم. این گسترش را با **AM** نشان می‌دهیم که CDL زیر مجموعه‌ی آن است.

تعریف ۱۸.۴ (انتقال)**.** انتقال $cl : \mathcal{L}_{K\Box\otimes} \to \mathcal{L}_{K\Box}$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$t(p) = p;$$

$$t(\neg\varphi) = \neg t(\varphi);$$

$$t(\varphi \wedge \psi) = t(\varphi) \wedge t(\psi);$$

$$t(K_a\varphi) = K_a t(\varphi);$$

$$t(\Box_a\varphi) = \Box_a t(\varphi);$$

$$t([\alpha]) = t(Pre_\alpha \to p);$$

$$t([\varphi](\varphi \wedge \psi)) = t(Pre_\alpha \to [\varphi]\varphi \wedge [\varphi]\psi);$$

$$t([\varphi]K_a\varphi) = t(Pre_\alpha \to \bigwedge_{\alpha' \sim_a \alpha} K_a[\alpha']\varphi);$$

$$t([\varphi]\Box_a\varphi) = t(Pre_\alpha \to \bigwedge_{\alpha' <_a \alpha} K_a[\alpha'] \wedge \bigwedge_{\alpha'' \cong_a \alpha} \Box_a[\alpha'']\varphi);$$

$$t([\pi \sqcup \pi']) = t([\pi]\varphi \wedge [\pi']\varphi);$$

$$t([\pi;\pi']) = t([\pi][\pi']\varphi).$$

تعریف ۱۹.۴ (پیچیدگی). پیچیدگی $c : \mathcal{L}_{K\Box\otimes} \to \mathbf{N}$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$
\begin{array}{lcl}
c(p) & = & 1; \\
c(\neg\varphi) & = & 1 + c(\varphi); \\
c(\varphi \wedge \psi) & = & 1 + \mathbf{max}(c(\varphi), c(\psi)); \\
c(K_a\varphi) & = & 1 + c(\varphi); \\
c(\Box_a\varphi) & = & 1 + c(\varphi); \\
c([\pi]\varphi) & = & (4 + c(\pi)).c(\varphi); \\
c(\alpha) & = & \mathbf{max}\{c(pre(t)) \mid \sigma \in \Sigma\}; \\
c(\pi \cup \pi') & = & 1 + \mathbf{max}(c(\alpha), c(\alpha')).
\end{array}
$$

لم ۶.۴.۴ (خواص). *برای تمام φ، ψ و χ خواص زیر را داریم.*

۱. اگر $\varphi \in Sub(\psi)$ باشد داریم $c(\psi) \geq c(\varphi)$.

۲. $c([\pi]\varphi) > c(Pre_\alpha \to p)$.

۳. $c([\varphi]\neg\varphi) > c(Pre_\alpha \to \neg[\alpha]\varphi)$.

۴. $c([\varphi](\varphi \wedge \psi)) > c(Pre_\alpha \to [\varphi]\varphi \wedge [\varphi]\psi)$.

۵. $c([\varphi]K_a\varphi) > c(Pre_\alpha \to \bigwedge_{\alpha' \sim_a \alpha} K_a[\alpha']\varphi)$.

۶. $c([\varphi]\Box_a\varphi) > c(Pre_\alpha \to \bigwedge_{\alpha' <_a \alpha} K_a[\alpha'] \wedge \bigwedge_{\alpha'' \cong_a \alpha} \Box_a[\alpha'']\varphi)$.

۷. $c([\pi \sqcup \pi']) > c([\pi]\varphi \wedge [\pi']\varphi)$.

۸. $c([\pi;\pi']) > c([\pi][\pi']\varphi)$.

اثبات. این لم نیز با استقراء به روی $c(\varphi)$ بدست می‌آید [۲۱]. ∎

حالا می‌توانیم لمی را اثبات کنیم که بیان می‌کند هر فرمولی با انتقالش هم ارز است.

لم ۷.۴.۴. *برای تمام فرمول‌های $\varphi \in \mathcal{L}_{K\otimes}$ داریم:*

$$\vdash \varphi \leftrightarrow t(\varphi).$$

اثبات. این لم نیز با استقراء بدست می‌آید [۲۱]. ∎

قضیه ۸.۴.۴. *برای هر $\varphi \in \mathcal{L}_{K\otimes}$*

$\vDash \varphi$ نتیجه می‌دهد $\vdash \varphi$.

اثبات. فرض کنید $\vDash \varphi$. بنابراین با توجه به درستی دستگاه برهان و $\mathbf{AM} \vdash \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$ داریم $\vDash t(\varphi)$. توجه کنید که فرمول $t(\varphi)$ شامل هیچ مدل کنشی نیست. بنابراین $CDL \vdash t(\varphi)$. با توجه به تمامیت CDL در نتیجه داریم $\mathbf{AM} \vdash t(\varphi)$. چرا که CDL یک زیر ساختار $\mathbf{AM}$ است. از آنجا که $\mathbf{AM} \vdash \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$ بدست می‌آید که $\mathbf{AM} \vdash \varphi$. ∎

درستی

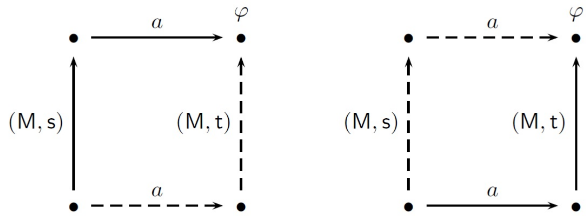
تنها اصل دانش را در اینجا اثبات می‌کنیم. بقیه موارد یا بدیهی هستند و یا به طور مشابه اثبات می‌شوند.

$$[\mathrm{M},\mathrm{s}]\varphi \leftrightarrow (pre(\mathrm{s}) \rightarrow \bigwedge_{\mathrm{s}\sim_a \mathrm{t}} K_a[\mathrm{M},\mathrm{t}]\varphi).$$

دوگان گزاره را که به صورت زیر بیان می‌شود را اثبات می‌کنیم(φ را جایگزین $\neg\varphi$ می‌کنیم.).

$$(pre(\mathrm{s}) \wedge \bigvee_{\mathrm{s}\sim_a \mathrm{t}} \hat{K}_a < \mathrm{M},\mathrm{t} > \varphi) \leftrightarrow\ < \mathrm{M},\mathrm{s} > \hat{K}_a\varphi.$$

قرار دهید $M =< S,\ \sim, V >$ و $\mathrm{M} =\ < \mathrm{S},\ \sim, Pre >$.



فرض کنید که $M,s \vDash Pre(\mathrm{s})$ و همچنین $\mathrm{t} \in \mathrm{S}$ چنان که $\mathrm{s} \sim_a \mathrm{t}$ و $M,s \vDash \hat{K}_a < \mathrm{M},\mathrm{t} > \varphi$. از $M,s \vDash Pre(\mathrm{s})$ نتیجه می‌شود که $(s,\mathrm{s}) \in M \otimes \mathrm{M}$. از $M,s \vDash \hat{K}_a < \mathrm{M},\mathrm{t} > \varphi$ نتیجه می‌شود وجود دارد $t \in S$ چنان‌که $s \sim_a t$ و $M,t \vDash\ < \mathrm{M},\mathrm{t} > \varphi$. از $M,t \vDash\ < \mathrm{M},\mathrm{t} > \varphi$ نتیجه می‌شود $M,t \vDash pre(\mathrm{t})$ چنان که $(t,\mathrm{t}) \in M \otimes \mathrm{M}$ و همچنین $(M \otimes \mathrm{M}, (t,\mathrm{t})) \vDash \varphi$. از $s \sim_a t$ و $\mathrm{s} \sim_a \mathrm{t}$ نتیجه می‌شود $(s,\mathrm{s}) \sim_a (t,\mathrm{t})$. از $(s,\mathrm{s}) \sim_a (t,\mathrm{t})$ و $(M \otimes \mathrm{M}, (t,\mathrm{t})) \vDash \varphi$ نتیجه می‌شود که $(M \otimes \mathrm{M}, (s,\mathrm{s})) \vDash \hat{K}_a\varphi$ بدین معنی که $M,s \vDash< \mathrm{M},\mathrm{s} > \hat{K}_a\varphi$.

حال فرض کنید که $M,s \vDash< \mathrm{M},\mathrm{t} > \hat{K}_a\varphi$. در نتیجه به روشنی داریم $M,s \vDash Pre(\mathrm{s})$. همچنین $M,s \vDash< \mathrm{M},\mathrm{s} > \hat{K}_a\varphi$ نتیجه می‌دهد که $(M \otimes \mathrm{M}, (s,\mathrm{s})) \vDash \hat{K}_a\varphi$. این بدین معنی است که وجود دارد $(t,\mathrm{t}) \in S \times \mathrm{S}$ بگونه‌ای که $(s,\mathrm{s}) \sim_a (t,\mathrm{t})$ و $(M \otimes \mathrm{M}, (t,\mathrm{t})) \vDash \varphi$. از $(s,\mathrm{s}) \sim_a (t,\mathrm{t})$ نتیجه می‌شود $s \sim_a t$ و $\mathrm{s} \sim_a \mathrm{t}$ از $(M \otimes \mathrm{M}, (t,\mathrm{t})) \vDash \varphi$ نتیجه می‌شود $(M,t) \vDash\ < \mathrm{M},\mathrm{t} > \varphi$. از $s \sim_a t$ و $(M,t) \vDash\ < \mathrm{M},\mathrm{t} > \varphi$ نتیجه می‌شود $(M,s) \vDash \hat{K}_a < \mathrm{M},\mathrm{t} > \varphi$. در t یک نقطه‌ی کنشی با $\mathrm{s} \sim_a \mathrm{t}$ وجود دارد. داریم $(M,s) \vDash \bigvee_{\mathrm{s}\sim_a\mathrm{t}} \hat{K}_a < \mathrm{M},\mathrm{t} > \varphi$.